**1-mavzu. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR FANIGA KIRISH. OʻZGARUVCHILARI AJRALADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.**

**Reja**

1. **Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. Asosiy tushuncha va taʼriflar.**
2. **Birinchi tartibli differensial tenglama. Koshi masalasi.**
3. **Yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema.**
4. **Oʻzgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Differensial tenglama haqida tushuncha. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama. Yechim tushunchasi. Umumiy yechim va xususiy yechim. Integral chiziq. Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

1. **Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish.**

**Asosiy tushuncha va taʼriflar.**

Tabiatda uchraydigan miqdorlarning koʻpchiligi oʻzining qonuniga ega. Bu qonunlarni toʻgʻridan-toʻgʻri topish ancha murakkab masala. Qaralayotgan miqdor, uning oʻzgarish tezligi va tezlanish oʻrasidagi bogʻlanishni topish tabiyatan ancha yengil. Bu bogʻlanishning matematik ifodasi sifatida oddiy differensial tenglamalar hosil boʻladi. Hayotda va amaliyotda differensial tenglamalar juda keng qoʻllaniladi.

Differensial tenglama tushunchasiga olib keluvchi ayrim masalalarni koʻrib chiqaylik. Masalan moddiy nuqta harakatini koʻraylik. U biror bir ***t*** vaqt mobaynida ***S*** masofani bosib oʻtadi va u ***t*** vaqtning funksiyasidir. Bunday funksiyalarni mexanikada **harakat qonuni** deyiladi. Masalan: ***s(t)***=2***t*** boʻlsa, t=4 sek. boʻlganda s(4)=2\*4=8metr. Moddiy nuqta boshlangʻich nuqtadan qancha masofa oʻtganligini koʻrsatadi. Moddiy nuqta tezligini aniqlamoqchi boʻlsakchi? Buning uchun oʻtilgan yoʻlni vaqtga boʻlish lozim.

Agar S(t) harakat qonuniga ega boʻlsak, t vaqt momenti va vaqt oraligʻi boʻlsa, u holda ushbu vaqt oraligʻida tezlik

ga teng boʻladi. Bu esa vaqt oraligʻidagi oʻrtacha tezlikni beradi. Spidometrda esa konkret vaqt momentidagi tezlikni koʻrsatadi. Bu tezlikni topish uchun tushunarliki ushbu vaqt momentini kamaytirish lozim. Xuddi shu ishni qachonlardir aqlli odamlar qilishgan va hosil boʻlgan narsaga hosila deyishgan:

Xuddi shu prinsipni xohlagan funksiya bilan qurish mumkin. Hosilani – konkret nuqtada **funksiyaning oʻzgarish tezligi** deyish mumkin. Tezlanish – bu tezlikni oʻzgarish tezligi hisoblanadi. Bundan esa harakatlanish qonuni aslini olganda 2-tartbli differensial tenglama ekanligini anglatadi:

.

Aytaylik parashyutchi samolyotdan sakradi. Uning massasi ***m*** ga teng boʻlsin. Uni ogʻirlik kuchi pastga tortadi. ***F=mg***, tepaga esa unga havoning qarshiligi taʼsir qiladi. Havoning qarshilik kuchi parashyutchi tezligi ***v*** ni kvadratiga proporsional:

, ***k*** – koeffitsiyent, yoʻnalish teskari boʻlgani uchun teskari ishora bilan olinadi.

Nyutonning 2-qonuniga koʻra, jismning massasi ***m*** va uning tezlanishi ***a*** ni koʻpaytmasi unga taʼsir qilayotgan kuchlar yigʻindisiga teng boʻladi. Aytaylik. *h(t)* – *t* vaqtdagi parashyutchining balandligi boʻlsa, tezlik – koordinata hosilasiga, tezlanish esa – tezlikning hosilasi, yaʼni koordinataning ikkinchi tartibli hosilasiga tengligini eslasak,

,

u holda Nyutonning 2-qonuni

Jumladan, matematik mayatnikning erkin tebranishi tenglamasi:

.

Bu yerda muvozanat holatdan chetlashish burchagi boʻlib, mayatnikning uzunligiga bogʻliq boʻlgan oʻzgarmas sondir.

**1-ta’rif.** Erkli oʻzgaruvchi , noma’lum funksiyasi  va uning  hosilalari orasidagi ushbu

 (1)

funksional bogʻlanishga ***tartibli oddiy differensial tenglama*** deyiladi.

**2-taʼrif.** Differensial tenglamaga kiradigan hosilalarning eng yuqori tartibiga ***differensial tenglamaning tartibi*** deyiladi.

**3-taʼrif.** oraliqda n-tartibli hosilalari mavjud va differensial tenglamani ayniyatga aylantiruvchi ixtiyoriy ***y(x)*** funksiyaga ***n-***tartibli differensial tenglama ***yechimi*** yoki ***integrali***deyiladi.

Yechimning grafigiga esa (1) oddiy differensial tenglamaning ***integral chizigʻi*** deyiladi.

Oshkormas  funksiya koʻrinishidagi yechimga (1) tenglamaning integrali deyiladi. Tarkibidagi  parametrlarga aniq qiymat berish hisobiga ixtiyoriy yechimni hosil qilish mumkin boʻlsa, bu yechimga (1) differensial tenglamaning ***umumiy yechimi*** deyiladi va  koʻrinishda belgilanadi. Oshkormas koʻrinishdagi umumiy yechimga (1) differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Oddiy differensial tenglamalar odatda har xil koʻrinishda boʻlishi mumkin, jumladan



yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan, ikkinchisi



yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamalardir.

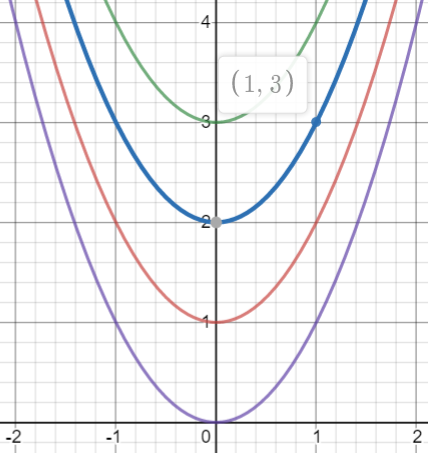
Differensial tenglamada - lar ixtiyoriy kombinatsiyada kelishi mumkin yoki umuman qatnashmasligi ham mumkin, faqatgina tenglamada *y(x)* nomaʼlum funksiyaning hech boʻlmaganda bitta hosilasi ishtirok etishi lozim.

Differensial tenglamalarning yechimi bitta funksiya yoki funksiyalar oilasi boʻladi.

**4-taʼrif .** Differensial tenglama hosilaning koʻphadi boʻlsa, u holda ushbu koʻphadning katta darajasi ***differensial tenglamaning darajasi*** deyiladi.

Masalan: - 2-tartibli, 4-darajali differensial tenglama hisoblanadi.

**5-taʼrif.** Differensial tenglamani yechish jarayoniga ***integrallash*** deyiladi.

****Differensial tenglamaning yechimlari **umumiy** va **xususiy yechimlarga** boʻlinadi. Umumiy yechimlar nomaʻlum oʻzgarmaslarni oʻz ichiga oladi. Xususiy hosilali tenglamalarda esa – erkli oʻzgaruvchining ixtiyoriy funksiyasi integrallashning qoʻshimcha shartlari orqali aniqlanadi (oddiy differensial tenglamalar uchun boshlangʻich shartlar, xususiy hosilali tenglamalar uchun boshlangʻich va chegaraviy shartlar). Nomaʼlum funksiyalar va oʻzgarmas koeffitsiyentlar aniqlangandan keyin yechimlar xususiy yechimga aylanadi.

**Misol.** differensial tenglamaning yechimi koʻrinishdagi parabolalar oilasi boʻlib, umumiy yechimni tashkil qiladi. Agar biror bir boshlangʻich shartni bajaruvchi yechimni topish masalasi, masalan, , u holda xususiy yechimga ega boʻlamiz.

Agar nomaʼlum funksiya *y(x)* ni kvadraturaga olib kelingan boʻlsa, yaʼni koʻrinishiga keltirilgan boʻlsa, integralni maʼlum funksiyalar bilan ifodalash mumkin, mumkin emasligidan qatʼiy nazar ***differensial tenglama yechilgan* yoki *differensial tenglamani integrallash hal qilindi* deyiladi.**  Zamonaviy katta tezlikka ega boʻlgan kompyuterlar oddiy differensial tenglamalarni analitik yechmasdan turib, samarali sonli yechimini topish imkonini beradi. Shuning uchun koʻpgina tadqiqodchilar masala oddiy differensial tenglamalarga olib kelinsa u yechilgan deb hisoblashadi.

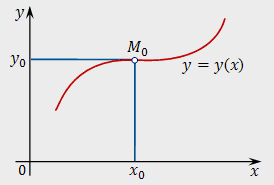
Barcha differensial tenglamalarni quyidagilarga boʻlsak boʻladi:

1. **Oddiy differensial tenglamalar**: ularga bitta argumentning funksiyasi va uning hosilalari kiradi;
2. **Xususiy hosilali tenglamalar**: ularga kiruvchi funksiyalar koʻp oʻzgaruvchili boʻladi;
3. **Stoxastik differensial tenglamalar**: ularga stoxastik jarayonlar kiradi.
4. **Birinchi tartibli differensial tenglama. Koshi masalasi.**

**6-taʼrif . *Birinchi tartibli differensial tenglama*** deb,

koʻrinishdagi tenglamaga aytiladi.

**7-taʼrif .** Agar tenglamani ga nisbatan yechish mumkin boʻlsa, ya’ni –tenglama ***hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama*** deyiladi.

**8-taʼrif.** Ushbu differensial tenglamaning (yoki boshqacha yozuvi ) boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deb aytiladi.

Koshi masalasi geometrik nuqtai nazardan XOY tekislikda berilgan nuqtadan oʻtuvchi integral egri chiziqni topishni anglatadi.

1. **Yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema**

Differensial tenglamalar uchun eng muhim masala yechimning mavjudligi va yagonaligi. Ushbu muammoning yechimiga esa zarur va yetarli shartlarni koʻrsatuvchi mavjudlik va yagonalik teoremalari javob beradi. Oddiy differensial tenglamalar uchun bunday shartlar 1864 yil Lipshis tomonidan isbotlangan.

Xususiy hosilali tenglamalar uchun esa mos teorema 1874 yil S.V. Kovalevskaya tomonidan isbotlangan.

Aytaylik, differensial tenglamadagi *f(x,y)* funksiya har bir *x, y* oʻzgaruvchi boʻyicha XOY tekislikning yopiq D sohasida aniqlangan va uzluksiz boʻlsin.

Ushbu *y’=f(x,y)* differensial tenglamani boshlangʻich shartni bajaruvchi Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema quyidagi koʻrinishni oladi.

**Teorema.(Mavjudlik va yagonalik)** Agar *f(x,y)* funksiya har bir *x, y* oʻzgaruvchisi boʻyicha D sohada aniqlangan va uzluksiz boʻlsa, shu bilan birga uning xususiy hosilasi ham shu sohada uzluksiz boʻlsa, u holda ushbu tenglamaning shartni qanoatlantiradigan yagona yechimi mavjud.

**Eslatma.** 1) Grafik tasvirda ushbu teorema D sohaning har bir M(x,y) nuqtasidan bitta integral egri chiziq oʻtishini anglatadi.

2) Teoremadagi xususiy hosila ni uzluksizligi talabini, yumshoqroq shart bilan almashtirish mumkin, bunda N-oʻzgarmas kattalik. Shartni bunday yumshatilishi Koshi masalasi yechimini yagonaligini ta’minlaydigan *f(x,y)* funksiyalar sinfini kengaytiradi, lekin teorema isbotini qiyinlashtiradi.

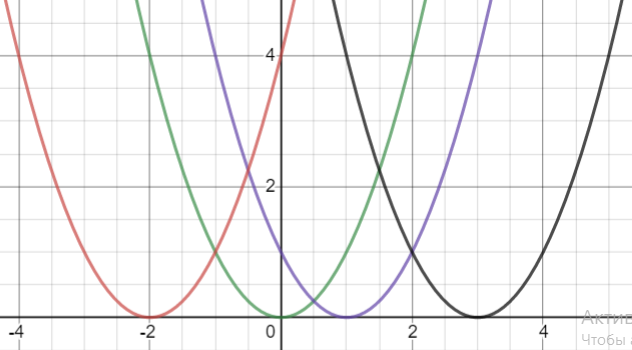
**9-taʼrif.** Teoremaning hech boʻlmaganda bitta sharti buziladigan nuqtalarga differensial tenglamaning **maxsus nuqtalari** deyiladi.

Agar OXY tekislikning nuqtasi maxsus nuqta boʻlsa, u holda quyidagicha holatlar boʻlishi mumkin:

1. nuqtadan birorta ham integral egri chiziq oʻtmaydi;
2. nuqtadan bir nechta integral egri chiziq oʻtishi mumkin;

**Misol.** Yechimning mavjudlik va yagonalik teoremasidan foydalanib,

differensial tenglamaning yechimlar toʻplamini tekshiring.

1. Koʻrilayotgan misol uchun . Ushbu funksiya OXY yuqori yarim tekislikda aniqlangan boʻlib, OX oʻqida ham aniqlangan.
2. Xususiy hosila , *y>0* boʻlganda uzluksiz. Barcha (x,0) nuqtalarda esa yechimning yagonaligi buziladi. Bu holda barcha (*x*;0) nuqtalar maxsus nuqtalar boʻladi. Demak integral egri chiziqlar, yaʼni yechimlar OX oʻqni kesib oʻtmaydi.
3. differensial tenglamadan koʻrinib turibdiki y=0 sonli oʻq OX yechim boʻladi. Agar boʻlsa, yechimni topish mumkin. Aytaylik boshlangʻich shart qoʻyilgan boʻlsin. Berilgan nuqta uchun C miqdorning qiymatini aniqlaymiz

, u holda berilgan boshlangʻich shartlarda xususiy yechim koʻrinishdagi OX oʻqiga urinib oʻtadigan parabolalar oilasini tashkil qiladi. Integral egri chiziqlar toʻplamini qurishni parabolanni OX oʻqi boʻyicha parallel koʻchirish deb tasavvur qilsak boʻladi.

1. Olingan natijalardan koʻrinadiki, nuqtalarda tenglama yechimi yagonaligi buzilayapti. Ushbu nuqtalardan ikkita integral chiziqlar oʻtayapti; y=0 toʻgʻri chiziq va parabola. Ushbu misol shunisi bilan qiziqki yechimning yagonaligi y=0 yechimning har bir nuqtasida buzilayapti. Bunday holda y=0 yechim ***maxsus yechim*** ham deyiladi.
2. **Oʻzgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar**

**10-taʼrif .** Agar differensial tenglamada funksiya *x* va *y* larga bogʻliq funksiyalar koʻpaytmasi koʻrinishda boʻlsa,

(2)

bu yerda va – uzluksiz funksiyalar, (2) ga ***oʻzgaruvchilari ajralgan differensial tenglama*** deyiladi.

ni ekanligini eʻtiborga olib, *x*-larni bir tomonga, *y*-larni ikkinchi tomonga oʻtkazamiz

ekanligiga ishonch hosil qilish kerak. Agar topilsaki boʻlsa, u holda bu qiymat ham differensial tenglama yechimi boʻladi. -ga boʻlish yechimni yoʻqotishga olib kelishi mumkin.

deb belgilash kiritsak,

–oʻzgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaning umumiy yechimiga ega boʻlamiz.

Agar -lar ham shu umumiy yechim ichiga kirsa, umumiy yechim shundoq qoladi, kirmasa bu yechimlarni ham alohida yozish kerak. Masalan:

.

**Misol.** -?

**Yechish.** , –larni yechim boʻlish boʻlmasligini ham tekshirib koʻramiz, ularni differensial tenglamaga qoʻyib koʻrilsa, differensial tenglama ayniyatga aylanadi. Demak ular ham yechim boʻladi. Ikkala tomondan ham integral olamiz.

umumiy yechim boʻladi.

**11-taʼrif.** Agar differensial tenglamada

va

boʻlsa, bunday differensial tenglamalar ***oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar*** deyiladi.

Bunday differensial tenglamalarni oʻzgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalarga keltirish uchun, tenglamaning ikkala tomonini ga koʻpaytirish lozim. Natijada,

oʻzgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga kelamiz.

**Eslatma:**  ga boʻlganda, va boʻladigan yechimlarni yoʻqotishimiz mumkin, shuning uchun ularni ham differensial tenglamaga qoʻyib tekshirish lozim. Differensial tenglama ayniyatga aylansa ularni ham umumiy yechimga qoʻshib qoʻyish lozim.

**Misol.**  tenglama umumiy yechimni va boshlangʻich shartni bajaruvchi yechimini toping.

**Yechish** а) *Umumiy yechimi.* Tenglamani  boʻlamiz. .

Bu erda  ,  – *umumiy yechimi*

b**)** *Hususiy yechimi. .*

* hususiy yechim.*

1. *Maxsus yechimi*. 

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1.tartibli oddiy differensial tenglama deb nimaga aytiladi?

2.Differensial tenglamaning tartibi debnimaga aytiladi?

3.Differensial tenglama yechimi yoki integralidebnimaga aytiladi?

4.Differensial tenglamaning maxsus nuqtalari debnimaga aytiladi?

5.Qanday tenglamaga hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama deyiladi?

6.Yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani ayting.

7.Oʻzgaruvchilari ajralgan differensial tenglama debnimaga aytiladi?

**2-mavzu. BIR JINSLI VA BIR JINSLIGA OLIB KELINADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. AMALIY MASALALARGA TATBIQI (KOʻZGU MASALASI).**

**Reja.**

**1.Bir jinsli differensial tenglamalar.**

**2.Bir jinsliga olib kelinadigan differensial tenglamalar.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** *k* oʻlchovli bir jinsli funksiya, bir jinsli differensial tenglama, bir jinsliga olib kelinuvchi differensial tenglamalar, “Koʻzgu masalasi”.

**1.Bir jinsli differensial tenglamalar.**

**Taʼrif 1.** Agar *f(x,y)* funksiya uchun

boʻlsa, *f(x,y)*-ga ***k******oʻlchovli******bir jinsli funksiya*** deyiladi.

**Taʼrif 2.** Agar differensial tenglamada va - bir xil oʻlchovli bir jinsli funksiyalar boʻlsa, bunday differensial tenglama ***bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

**Ta’rif 3.** Agar quyidagi

 (1)

differensial tenglamaning oʻng tomonidagi  funksiya uchun

 (2)

shart bajarilsa, (1) differensial tenglamaga ***bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. Oxirgi (2) tenglikda  desak,



munosabat hosil boʻladi. Buning natijasida (1) differensial tenglama ushbu

 (3)

koʻrinishni oladi. Endi (3) koʻrinishdagi differensial tenglamaning yechimini topish bilan shugʻullanamiz. Buning uchun quyidagi

 (4)

almashtirishdan foydalanamiz. Bu yerda  yangi noma’lum funksiya. Bu (4) almashtirishning ikkala tomonini differensiallab

 (5)

tenglikni hosil qilamiz. (4) va (5) tengliklardan foydalanib, (3) differensial tenglamani quyidagicha yozish mumkin:



ya’ni

 (6)

Bu esa oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir.

***Bunday differensial tenglamalarni yechish algoritmi quyidagicha:***

1. ***differensial tenglama bir jinslilikka tekshiriladi.***
2. ***differensial tenglama koʻrinishga keltiriladi.***
3. ***– almashtirish bajariladi.***
4. ***Almashtirish natijasida differensial tenglama oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keladi.***
5. ***Oʻzgaruvchilari ajraladigan d.t. ning umumiy yechimi u va x ga bogʻliq boʻladi.***
6. ***Teskari almashtirish bajaramiz , natijada boshlangʻich differensial tenglamaning umumiy yechimiga ega boʻlamiz.***

**Misol**. -?

**Yechish.**



ikkalasi ham ikki oʻlchovli bir jinsli

1. – almashtirish bajaramiz. differensial tenglamaga qoʻyamiz.
2. – umumiy yechim.

**2.Bir jinsliga olib kelinuvchi differensial tenglamalar.**

Aytaylik

(7)

koʻrinishdagi differensial tenglama berilgan boʻlsin.

, - oʻzgarmas koeffitsiyentlar. Bunday differensial tenglamalar turli xil koʻrinishlarda kelishi mumkin. ==0 – boʻlsa, differensial tenglamala-bir jinsli boʻladi. Aytaylik , larning hech boʻlmaganda bittasi 0 dan farqli boʻlsin. Ushbu holatni ikki xil yoʻl bilan hal qilinadi:

1. Agar boʻlsa, u holda (7) ***bir jinsli differensial tenglamaga*** olib kelinadi.
2. Agar boʻlsa, u holda (7) ***oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga*** olib kelinadi.
3. ***Agar boʻlsa, (7) ni yechish algoritmi quyidagicha boʻladi:***
4. ***sistemadan lar topiladi.***
5. ***yangi oʻzgaruvchilarga oʻtamiz. Ushbu almashtirishdan keyin , –lardan qutulamiz va bir jinsli differensial tenglamaga kelamiz***
6. ***Bir jinsli differensial tenglamalarni yechish algoritmini qoʻllab, larga bogʻliq boʻlgan umumiy yechimni topamiz.***
7. ***Umumiy yechimda teskari almashtirish larni bajarib, boshlangʻich berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz.***

**Misol.**

2. oʻzgaruvchi almashtiramiz
3. natijada ozod hadlardan qutulamiz va bir jinsli tenglamaga kelamiz, uni yechish uchun oʻzgaruvchi almashtirish bilan yechamiz.

logarifmlarni ixchamlaymiz

1. almashtirish bajaramiz

endi boshlangʻich oʻzgaruvchilarga qaytamiz:

**Eslatma**: Differensial tenglamani yechish jarayonida ga boʻlishga toʻgʻri kelgan edi. Yechimni yoʻqotmaganligimizni tekshirish uchun ni differensial tenglamaga qoʻyib koʻramiz:

Demak *y=x* ham yechim boʻladi. Shunday qilib

umumiy yechim.

Agar xuddi shu differensial tenglama uchun Koshi masalasi berilgan boʻlsin.

, u holda

**– umumiy yechim boʻladi.**

***II. Agar boʻlsa, (2) differensial tenglamani yechish algoritmi soddalashadi:***

1. ***yoki belgilash kiritamiz.***
2. ***Ushbu belgilashni differensial tenglamaga qoʻyamiz, natijada oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga ega boʻlamiz.***
3. ***Oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani yechish algoritmini qoʻllaymiz.***
4. ***Hosil boʻlgan z ga bogʻliq boʻlgan umumiy yechimda teskari oʻzgaruvchi almashtirish bajarib, boshlangʻich differensial tenglama umumiy yechimiga ega boʻlamiz.***

**Misol.**

**Yechish.** ,

1. almashtirish bajaramiz.
2. differensial tenglamaga qoʻyamiz:
3. teskari oʻzgaruvchi almashtiramiz:

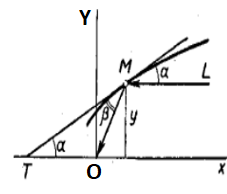
–umumiy yechim

***Eslatma:*** *z* ga boʻlganimiz uchun, *z=*0 yechim yoʻqotilgan boʻlishi mumkin, tekshiramiz. ni differensial tenglamaga qoʻyib koʻramiz:

Demak ham yechim va C ning har qanday qiymatida ham ni umumiy yechimdan hosil qilib boʻlmaydi. Demak uni alohida yechim qilib qoʻshamiz:

**Koʻzgu shakli haqidagi masala**

**Masala.** Parallel nurlarni bitta nuqtaga yigʻadigan koʻzgu shaklini aniqlang.

OX oʻqi sifatida nurlarlarga parallel boʻlgan toʻgʻri chiziqni tanlaymiz. Koordinata boshi sifatida barcha nurlar akslangandan keyin kesishadigan nuqtani belgilaymiz. Agar LM toʻgʻri chiziqqa tushib O nuqtaga tushayotgan nur boʻlsa, u holda (optika qonuni boʻyicha nurni tushish burchagi, akslanish burchagiga teng) LM va MO nurlar M nuqtaga oʻtqazilgan TM urinma bilan hosil qilgan va burchaklari teng boʻlishi zarur. Buning natijasida OTM uchburchak teng yonli boʻladi, shuning uchun TO=OM. Agar (x;y)-M nuqtani koordinatalari boʻlsa, u holda . Urinmani OX oʻqi bilan kesishish nuqtasi T ni abssissasini tashkil etgan OT kesmani urinma tenglamasidan topamiz. . Y=0 deb olsak X=OT, u holda . Olingan natijalarni TO=OM teglikka qoʻysak

(8)

Formulaga ega boʻlamiz, uni simmetrik koʻrinishda yozib:

Koʻrinib turibtiki ushbu tenglama bir jinsli tenglama. Oʻzgaruvchi almashtiramiz , u holda boʻlib, bularning barchasini (8) ga qoʻysak, quyidagiga ega boʻlamiz:

Oʻzgaruvchilarni ajratib, integrallaymiz:

Cah tomondagi ifoda qoʻshmasiga koʻpaytirib, boʻlamiz

(10)

(9) va (10) ni qoʻshish orqali u ning ifodasini topamiz:

va oʻzgaruvchi almashtirishni orqaga qaytaramiz:

, belgilash kiritib, yakuniy quyidagiga ega boʻlamiz:

yechim boʻlib, simmetriya oʻqi OX, fokusi esa koordinatalar boshida yotgan parabola boʻladi. Shunday qilib, qidirilayotgan parabolaning oʻqi nurlar dastasiga parallel boʻladi, parabola fokusi esa optic fokusda yotadi. Bunday parabolani OX oʻqi atrofida aylantirib, qidirilayotgan koʻzgu sirti aylanma paraboloidni topamiz. Koʻrinib turibtiki, agar yorugʻlik manbaini koordinata boshi (fokus) ga joylashtirilsa, u holda undan akslangan nurlar parallel nurlar dastasi boʻyicha qaytadi. Shuning uchun ham projektorlar koʻzgulariga aylanma paraboloid shakli beriladi.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1.*k* oʻlchovli bir jinsli funksiya deb nimaga aytiladi?

2.Qanday differensial tenglama bir jinsli differensial tenglama deyiladi?

3.Bir jinsli differensial tenglamaning yechish algoritmini keltiring.

4.Qanday differensial tenglama bir jinsliga keltiriladigan differensial tenglama deyiladi?

5.“Koʻzgu masalasi” haqida ayting.

6.Nima uchun projektor koʻzgulariga aylanma paraboloid shakli beriladi?

**3-mavzu. CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA UNI YECHISHNING LAGRANJ VA BERNULLI USULLARI. AMALIY MASALALARGA TATBIQI.**

**Reja**

**1.Chiziqli differensial tenglama.**

**2.Chiziqli differensial tenglamalarni yechishning Lagranj (oʻzgarmasni variyatsiyalash) usuli.**

**3.Chiziqli differensial tenglamalarni yechishning Bernulli usuli.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama, bir jinsli boʻlmagan differensial tenglama,Bernulli usuli

**1.Chiziqli differensial tenglama.**

Nоma’lum funksiya va uning hоsilasiga nisbatan chiziqli boʻlgan tenglamalar ***birinchi tartibli chiziqli*** ***differensial tenglamalar*** deb ataladi.

Ushbu

 (1)

koʻrinishdagi tenglamaga birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda  va  funksiyalar biror  oraliqda aniqlangan va uzluksiz deb qaraladi.

Agar boʻlsa, (1) tenglamaga chiziqli bir jinsli boʻlmagan differensial tenglama deyiladi. Agar boʻlsa, (1) tenglamaga chiziqli bir jinsli differensial tenglama deyiladi va ushbu

 (2)

koʻrinishni oladi. Bu esa oʻzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Koʻrinib turibdiki  funksiya (2) differensial tenglamaning yechimidan iborat. Agar  boʻlsa, (2) differensial tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

.

Bu tenglikning ikkala tomonini integrallab quyidagi

 (3)

tenglikni olamiz. (3) tenglikdan

 (4)

formulani hosil qilamiz. Bu yerda -ixtiyoriy oʻzgarmas son.

(4) formula (2) koʻrinishdagi bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechi-

mini ifodalaydi.

Bir jinsli boʻlmagan (1) koʻrinishdagi differensial tenglamaning umumiy yechimini topishning bir qancha usullari bor. Standart (1) koʻrinishda berilgan chiziqli bir jinsli boʻlmagan birinchi tartibli differensial tenglamani ikki xil usulda yechishni koʻrib chiqamiz.

**2.Chiziqli differensial tenglamalarni yechishning Lagranj (oʻzgarmasni variyatsiyalash) usuli.**

Avvalo biz Lagranj, ya’ni oʻzgarmasni variyatsiyalash usuli bilan tanishamiz. Shu maqsadda (1) differensial tenglamaning yechimini ushbu

 (5)

koʻrinishda izlaymiz. Bu yerda hozircha noma’lum funksiya. (5) tenglikning ikki tomonini differensiallab

 (6)

tenglikni hosil qilamiz. Bu  va  funksiyalarning (5) va (6) ifodalarini mos ravishda (1) differensial tenglamaga qoʻyib



munosabatni topamiz. Bundan

.

Oxirgi tenglikni integrallasak

 (7)

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerda -ixtiyoriy oʻzgarmas son.

Yuqoridagi (5) tenglikdan va (7) formuladan fordalanib, (1) differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

.

**Misol 1.** differensial tenglamani yeching.

**Yechish.**

.

.

.

.

**Misol**  differensial tenglamani yechimini toping.

**Yechish.** .



=.

Umumiy yechim .

(1) differensial tenglamaning

 (8)

boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi qaraymiz.

**Теорема**. Koshi masalasini yechimi  (9)

funksiyadir.

Agar (9) tenglikning oʻng tomonidagi ikkinchi hadni



belgilab olsak, u holda  funksiya (1) differensial tenglamaning



boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini beradi. Shuning uchun (9) formula

 (10)

koʻrinishni oladi. Bu esa bir jinsli boʻlmagan (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli (2) differensial tenglamaning  umumiy yechimi bilan bir jinsli boʻlmagan (1) differensial tenglamaning  xususiy yechimining yigʻindisidan iborat ekanligini koʻrsatadi.

**Misol .**

**Misol .**

**Misol .**

**3.Chiziqli differensial tenglamalarni yechishning Bernulli usuli**

(1) tenglamaning yechimini *x* ning ikkita funksiyasining koʻpaytmasi shaklida izlaymiz:

   . (11)

Bu funksiyalardan birini ixtiyoriy tanlab olish mumkin, ikkinchisini esa (1)–tenglama asosida aniqlanadi. (11) tenglikdan  ni hisoblaymiz:

 .

 *va*  ni (1) tenglamaga qoʻyamiz, natijada u quyidagi koʻrinishga ega boʻladi:

 (12)

yoki

. (13)

Funksiyalardan birini ixtiyoriy tanlab olish mumkin boʻlgani uchun  funksiyani qavs ichida turgan ifoda nolga teng boʻladigan qilib olamiz, ya’ni

 (14)

boʻlishini talab qilamiz. U holda  funksiyani topish uchun (13) tenglikdan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

 (15)

Dastlab, (14) tenglamadan  ni topamiz:

.

(14) tenglamaning noldan farqli birorta yechimi zarur, shuning uchun C=1 deb olamiz. U holda

. (16)

 ning bu topilgan ifodasini (15) tenglamaga qoʻyib, *u* funksiya uchun oʻzgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

.

Bu tenglamani yechamiz:

. (17)

(16) va (17) lar *u* va *v*  ning *x* orqali ifodalarini beradi. *u* va *v*  ni (11)ga qoʻyib, berilgan chiziqli tenglamaning



umumiy yechimini hosil qilamiz .

**Misol .** differensial tenglamani yeching.

**Yechish.**



bu bosqichda .

1. -umumiy yechim boʻladi.

**Misol**  differensial tenglamani  boshlangʻich shartni

qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

**Yechish.** .



=.

Umumiy yechim ,

boshlangʻich shartdan foydalanib  topamiz: 

 boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechim

 boʻladi.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1.Qanday differensial tenglamaga birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi?

2.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yechish usullarini ayting.

3.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yechishning Lagranj (o‘zgarmasni variatsiyalash) usuli qanday?

4.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yechishning Bernulli (o‘rniga qo‘yish) usulida qanday almashtirish bajariladi?

**4-mavzu. BERNULLI TENGLAMASI. TOʻLA DIFFERENSIAL TENGLAMA. INTEGRALLOVCHI KOʻPAYTUVCHI.**

**Reja.**

1. **Bernulli tenglamasi.**
2. **Rikkati tenglamasi.**
3. **Toʻla differensial tenglama.**
4. **Integrallovchi koʻpaytuvchi va uni tanlash usullari.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Bernulli differensial tenglamasi, bir jinsli differensial tenglama, bir jinsliga olib kelinuvchi differensial tenglamalar, to‘la differensial tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi.

1. **Bernulli tenglamasi.**

Ushbu

 (1)

koʻrinishdagi tenglamaga Bernulli differensial tenglamasi deyiladi. Bu yerda , ya’ni  intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalar.

Agar  boʻlsa, u holda



chiziqli differensial tenglama hosil boʻladi.

Agar  boʻlsa, u holda



bir jinsli chiziqli differensial tenglama hosil boʻladi.

**1-usul.** Aytaylik,  boʻlsin. Koʻrinib turibdiki,  (1) differensial tenglamaning yechimidan iborat. Agar  boʻlsa, u holda (1) tenglamaning ikki tomonini  ga boʻlib ushbu

 (2)

differensial tenglamani hosiln qilamiz. Bunda

 (3)

almashtirishni bajaramiz. Quyidagi



munosabatlardan foydalanib (2) tenglamani ushbu



ya’ni



koʻrinishda yozish mumkin. Bu esa chiziqli bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamadir. Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi 3-mavzudagidek topiladi, hamda *z* oʻrniga  ni qoʻyib, Bernulli tenglamasining umumiy yechimi topiladi.

*y* ning darajasidagi *n* musbat ham (*n>0*), manfiy ham (*n<0*), kasr son ham boʻlishi mumkin.

Bernulli tenglamasi turli xil koʻrinishlarda berilishi mumkin:

**Misol**.  еки .

**Yechish.** Bu Bernulli tenglamasidir. Bu yerda .

Tenglamani  ga bo‘lamiz: .

deb belgilaymiz, unda .

Demak,  yoki .

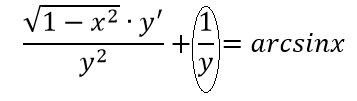
Bundan .

 va  –mahsus yechim.

**Misol.**

**Yechish.**

1. Oʻng tomonda ***y*** dan qutulish kerak.



1. Konturga olingan qoʻshiluvchida ***y*** dan qutulish kerak, buning uchun almashtirish bajaramiz.

Natijada Bernulli differensial tenglamasidan chiziqli bir jinsli boʻlmagan birinchi tartibli differensial tenglamaga kelamiz. Bunday tenglamalarni yechish usullarini esa bilamiz.

**2-usul.** Bеrnulli tеnglamasining yechimini *x* ning ikkita funksiyasining koʻpaytmasi shaklida izlaymiz:

   (4)

 (5)

 (6)

(6) da

 (7)

boʻlishini talab qilamiz, u holda

 . (8)

(7) va (8) tenglamalarni birgalikda yechib, (4) ga qoʻyib umumiy yechim topiladi.

**2-misоl.**  diffеrеnsial tеnglamaning umumiy yеchimini tоping.

**Yechish.** 2-usulda yechamiz, , .

.



Sistemaning birinchi tenglamasini yechamiz: , soʻngra ikkinchi tenglamasiga qoʻyamiz:

,

,





Demak, umumiy yechim

◄

**3-usul.** Bеrnulli tеnglamasining yechimini oʻzgaruvchini variatsiyalash usulida ham topish mumkin.

1. **Rikkati tenglamasi.**

**Rikkati tenglamasi** birinchi tartibli chiziqli boʻlmagan differensial tenglamalarning eng qiziqarlilaridan hisoblanadi.

Ushbu

 (9)

ko‘rinishdagi tenglamaga Rikkati differensial tenglamasideyiladi. Bu yerda  boʻlib, .

Agar  boʻlsa, u holda (1) differensial tenglama ushbu



koʻrinishni oladi. Bu esa chiziqli bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamadir.

Agar  boʻlsa, u holda (1) differensial tenglama



koʻrinishni oladi. Bu esa Bernulli differensial tenglamasidir.

Umumiy holda Rikkati differensial tenglamasi kvadraturada integrallanmaydi.

Shuni alohida qayd qilish lozimki, ayrim xususiy hollardagina Rikkati differensial tenglamasini kvadraturada integrallanishini koʻrsatish mumkin. Jumladan 1841 yilda Liuvill ushbu

koʻrinishdagi Rikkati differensial tenglamasi kvadraturada integrallanuvchi boʻlishi uchun  soni butun boʻlishi kerakligini koʻrsatib berdi. Ammo Rikkati differensial tenglamasining ayrim xossalarini oʻrganishimiz mumkin.

**Lemma-1.** Rikkati tenglamasi quydagi:

1. 

2. Kasr-chizqli

amashtirishlarga nisbatan koʻrinishini oʻzgartirmaydi.

**Isbot.** 1. Ushbu  tenglikning ikki tomonini differensiallab

, 

munosabatlarni topamiz. Bu tengliklarni (9) differenasial tenglamaga qoʻyib

 (10)

differensial tenglamani hosil qilamiz. Bunda ushbu

belgilashlardan foydalansak (10) tenglama



koʻrinishni oladi. Bu esa Rikkati differensial tenglamasidir.

2. Berilgan kasr-chiziqli almashtirishning ikki tomonini differensiallab

 (11)

differensial tenglamani topamiz. Berilgan kasr-chiziqli almashtirish natijasida ushbu



kvadrat uchhadning oʻzgarishini aniqlaymiz:

. (12)

Yuqoridagi (9) differensial tenglamadan va (11) hamda (12) munosabatlardan foydalanib quyidagi



tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik elementar amallar natijasida ushbu



koʻrinishni oladi. Bundan



kelib chiqadi. Bu esa Rikkati differensial tenglamasidir. ■

**Lemma-2.** Rikkati tenglamasini ushbu

 (13)

almashtirishlar yordamida kanonik koʻrinishga keltirish mumkin:

. (14)

**Isbot.** Avvalo (13) almashtirishdan

 (15)

topamiz. Soʻngra (13) va (15) larni (9) differensial tenglamaga qoʻyib



ya’ni

 (16)

differensial tenglamani olamiz. Bu yerda



deb tanlansa, u holda



oʻrinli boʻladi. Natijada (16) differensial tenglama

 (17)

koʻrinishni oladi. Bu differensial tenglamada ushbu



almashtirishni bajarib



ya’ni

 (18)

differensial tenglamani topamiz. Oxirgi (18) tenglamada  oldidagi koeffitsiyentni nolga tenglashtirsak



ya’ni



kelib chiqadi. Natijada (18) differensial tenglama



kanonik koʻrinishga keladi. Lemma isbotlandi. ■

**Teorema-1.** Agar Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi ma’lum bo`lsa, u holda Rikkati tenglamasining barcha yechimlari ikkita kvadratura yordamida topiladi.

**Isbot.**Faraz qilaylik,  funksiya (9) differensial tenglamaning xususiy yechimi boʻlsin. U holda



almashtirish natijasida (1) tenglama ushbu

 (19)

koʻrinishni oladi. Teorema shartiga koʻra



oʻrinli. Bundan foydalanib (19) tenglamani

 (20)

koʻrinishda yozish mumkin. Bu esa Bernulli differensial tenglamasidir, uning yechimi ikkita kvadratura yordamida topiladi. Chunki (20) tenglama



almashtirish yordamida chiziqli differensial tenglamaga keladi. Shunday qilib

  (21)

almashtirish natijasidan Rikkati differensial tenglamasi chiziqli differensial tenglamaga keltirilar ekan. Teorema isbotlandi. ■

**Teorema-2.** Agar Rikkati tenglamasining ikkita xususiy yechimi ma’lum boʻlsa, u holda uning umumiy yechimi bitta kvadratura yordamida topiladi.

**Isbot.** Aytaylik  va  funksiyalar (9) differensial tenglamaning xusuiy yechimlari boʻlsin. U holda (20) differensial tenglamani



almashtirish yordamida

 (22)

chiziqli differensial tenglamaga keltiramiz. (21) munosabatga asosan (22) tenglamaning bitta xususiy yechimi



boʻladi. Bu holda (22) tenglamaning yechimi bitta kvadratura yordamida topiladi. Teorema isbot boʻldi. ■

**Misol.** Ushbu



differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.** Bu yerda  berilgan differensial tenglamaning xususiy yechimidan iborat boʻlgani uchun



almashtirish bajaramiz. Natijada berilgan differensial tenglama



koʻrinishni oladi. Ma’lumki, bu chiziqli bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu



formula orqali topiladi. Bundan



kelib chiqadi.

**Teorema-3.** Agar Rikkati tenglamasining uchta xususiy yechimi ma’lum boʻlsa, u holda uning umumiy yechimi kvadraturasiz topiladi.

**Isbot.** Faraz qilaylik,  va  funksiyalar (9) differensial tenglamaning xususiy yechimlari boʻlsin. U holda (22) chiziqli differensial tenglama ikkita



xususiy yechimlarga ega boʻladi. Shuning uchun (22) chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi kvadraturasiz topiladi:

 (23)

(21) va (23) tengliklarni tenglashtirib



munosabatni hosil qilamiz. Bundan oʻz navbatida oʻzgarmas  sonining qiymati topiladi:

.r (24)

Bu esa Rikkati tenglamasining umumiy integralidir. Teorema isbotlandi. ■

**Natija.** Agar Rikkati tenglamasining toʻrtta     xususiy yechimlari ma’lum boʻlsa, u holda quyidagi



ayniyat oʻrinli boʻladi.

**Teorema-4.** Rikkati tenglamasining umumiy yechimi, ixtiyoriy oʻzgarmas  sonining kasr-chiziqli almashtirishidan iborat.

**Isbot.** Yuqoridagi (22) chiziqli differensial tenglamaning umumiy yehimi



koʻrinishga ega boʻlganligidan (21) almashtirishni



ya’ni

 (25)

koʻrinishda yozish mumkin. Bu yerda

Bundan koʻrinadiki, (25) tenglik yordamida aniqlangan  funksiya  ning kasr-chiziqli almashtirishidan iborat. ■

1. **Toʻla differensialli tenglama.**

Agar

(26)

differensial tenglamada funksiya topilsaki,

boʻlsa,

boʻlib, **umumiy yechim**

koʻrinishda boʻladi.

**Ta’rif-1.** Agar (26) differensial tenglamaning chap tomoni biror  uzluksiz funksiyaning toʻliq differensialidan iborat boʻlsa, u holda (26) tenglamaga toʻliq differensialli tenglama deyiladi.

Agar differensial tenglama uchun

shart bajarilsa, u holda differensial tenglama **toʻla differensialga keladi** va funksiya quyidagicha koʻrinishda qidiriladi:

**1-usul:** shartdan ***y*** ni oʻzgarmas deb olib, ***x*** boʻyicha integral olamiz, constantani y ga bogʻliq funksiya qilib olib

ikkinchi shartni ham bajarilishini talab qilib, ni ham koʻrinishini aniqlaymiz.

**2-usul:** shartdan ***x*** ni oʻzgarmas deb olib, ***y*** boʻyicha integral olamiz, constantani ***x*** ga bogʻliq funksiya qilib olib

birinchi shartni ham bajarilishini talab qilib, ni ham koʻrinishini aniqlaymiz.

**Misol**.

Differensial tenglama toʻla differensialga keltirilish shartini tekshiramiz.

shart bajarildi, u holda quyidagi usullarda ishlaymiz

**1-usul.**

=

ni topish uchun ikkinchi shartni bajarilishini talab qilamiz:

**2-usul.**

ni topish uchun birinchi shartni bajarilishini talab qilamiz:

**Eslatma:** Agar ni  funksiyaga koʻpaytirish natijasida toʻla differensialga aylansa,   *ga* **integrallovchi koʻpaytuvchi** deyiladi. Agar *M(x,y)* va *N(x,y)* funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega va bir vaqtni oʻzida nolga aylanmasa, u holda integrallovchi koʻpaytuvchi mavjud. Lekin uni qidirishning umumiy usuli mavjud emas.

**4.Integrallovchi koʻpaytuvchi va uni tanlash usullari.**

Aytaylik quyidagicha differensial tenglama

(27)

berilgan boʻlib, *P(x,y)* va *Q(x,y)* lar ikkita oʻzgaruvchi x va y larning funksiyasi boʻlib, biror bir D sohada uzluksiz boʻlsin. Agar

boʻlsa, u holda tenglama toʻla differensialli tenglama boʻlmaydi. Biroq integrallovchi koʻpaytuvchini tanlashga urinib koʻrishimiz mumkin. Agar (27) tenglamani  funksiyaga koʻpaytirish natijasida toʻla differensialga aylansa,  *ga* **integrallovchi koʻpaytuvchi** deyiladi. U holda quyidagicha tenglik oʻrinli boʻladi:

Ushbu shartni quyidagicha koʻrinishda yozish mumkin:

Oxirgi ifoda birinchi tartibli xususiy hosilali tenglama boʻlib, integrallovchi koʻpaytuvchini aninqlaydi. Integrallovchi koʻpaytuvchini topishning umumiy usuli mavjud emas, lekin ayrim xususiy hollarda olingan xususiy hosilali tenglamani yechib, natijada integrallovchi koʻpaytuvchini aniqlash mumkin.

1. **Integrallovchi koʻpaytuvchi *x* oʻzgaruvchiga bogʻliq boʻlsa:** 

Bunday holda boʻlib, shuning uchun ham  uchun tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

Ushbu tenglamaning oʻng tomoni faqat *x* ning funksiyasi

 (28)

boʻlsa, u holda  funksiyani oxirgi tenglamani integrallash orqali topish mumkin, ya’ni



boʻladi.

1. **Integrallovchi koʻpaytuvchi *y* oʻzgaruvchiga bogʻliq boʻlsa:** 

Oldingi holatdagidek, bu holda boʻlib, shuning uchun ham  uchun tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

Ushbu tenglamaning oʻng tomoni faqat ***y*** ning funksiyasi

 (29)

boʻlsa, u holda  funksiyani oxirgi tenglamani integrallash orqali topish mumkin, ya’ni



boʻladi.

**4-misol.**  diffеrеnsial tеnglamaning umumiy yechimini tоping.

**Yechish.** Bu yerda  toʻla differensiallik sharti bajarilmaydi.(28) yoki (29) shartlarni tekshiramiz:

.

Demak, (28) shart bajariladi,  formuladan foydalanamiz:



Berilgan tenglamani ga koʻpaytiramiz:



Hosil boʻlgan tenglama toʻla differensial tenglama ekanini tekshiramiz:









 yoki .

Demak, 

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi esa

.◄

**3.Integrallovchi koʻpaytuvchi *x* va *y* oʻzgaruvchilarning aniq bir kombinatsiyalariga bogʻliq bolsa:** 

Yangi *z(x,y)* funksiya masalan quyidagicha koʻrinishlarda boʻlishi mumkin:

Bunda muhimi shundaki, integrallovchi koʻpaytuvchi  bitta ***z*** oʻzgaruvchining funksiyasi sifatida keladi:



va quyidagicha differensial tenglamadan topiladi:

Oʻng tomon faqat z ga bogʻliq va maxraj nolga teng emas deb faraz qilinadi.

**Misol.** differensial tenglama yechhilsin.

**Yechish.** Boshlanishida tenglama toʻla differensialli tenglama ekanligini tekshiramiz:

Koʻrinib turibtiki xususiy hosilalar bir-biriga teng emas, demak tenglama toʻla differensiallanuvchi tenglamaga kelmaydi. Toʻla differensiallanuvchi koʻrinishga olib kelish uchun integrallovchi koʻpaytuvchini tanlashga harakat qilib koʻramiz:

Quyidagicha funksiyani hisoblaymiz:

Koʻrinib turibtiki:

Ifoda faqat ***x*** oʻzgaruvchiga bogʻliq, demak integrallovchi koʻpaytuvchi ham faqat x ga bogʻliq boʻladi: ***,*** uni esa quyidagi tenglamadan topamiz:

***=x*** ni tanlaymiz va berilgan differensial tenglamani x ga koʻpaytiramiz. Natijada toʻla differensialli tenglamaga kelamiz:

Endi toʻla differensiallilik sharti bajariladi:

*u(x,y)* funksiyani tenglamalar sistemasidan aniqlash mumkin:

Birinchi tenglamadan

Ushbu ifodani ikkinchi tenglamaga qoʻyib ni aniqlaymiz:

, bunda C – ixtiyoriy konstanta

Shunday qilib, differensial tenglamaning umumiy yechimi

.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1.Qanday differensial tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi?

2.Bernulli tenglamasini chiziqli tenglamaga keltirish uchun qanday almashtirish bajariladi?

3.Bernulli tenglamasini yechishning 2-usulini ayting.

4.Qanday differensial tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi?

5.Qanday differensial tenglamaga to‘la differensial tenglama deyiladi?

6.Integrallovchi ko‘paytuvchi deb nimaga aytiladi?

**5-mavzu. HOSILAGA NISBATAN YECHILMAGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. LAGRANJ VA KLERO TENGLAMALARI.**

**Reja**

**1.Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash usullari.**

**2.Lagranj differensial tenglamasi.**

**3.Klero differensial tenglamasi.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Hosilaga nisbatan yechilmagan, Lagranj differensial tenglamasi, Klero tenglamasi.

**1.Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash usullari.**

**Taʼrif 1.** Quyidagi koʻrinishdagi differensial tenglamaga

*,*

hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglama deyiladi, bunda F – uzluksiz funksiya.

Agar ushbu tenglamani ga nisbatan yechishni iloji boʻlsa, u holda bitta yoki bir nechta

koʻrinishdagi differensial tenglamalarga ega boʻlamiz. Bunday tenglamalarni yechish usullarini esa boshqa mavzularda koʻrib chiqildi.

Differensial tenglamamiz ga nisbatan yechishning iloji boʻlmasa, bunday tenglamalarning asosiy yechish usuli bu – parametr kiritish usuli hisoblanadi. Shuni taʼkidlash kerakki, umumiy yechim differensial tenglamaning barcha yechimlarini qoplamasligi mumkin. Umumiy yechimdan tashqari differensial tenglama maxsus yechimlarga ham ega boʻlishi mumkin. Bunday differensial tenglamalarni parametr kiritish usuli bilan yechishni ayrim xususiy hollar uchun koʻrib chiqamiz:

**1-hol.** Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsin.

koʻrinishda parametr kiritamiz. differensial tenglamani y boʻyicha differensiallaymiz.

boʻlgani uchun, oxirgi ifodani quyidagicha koʻrinishda yozish mumkin:

Oshkor koʻrinishdagi differensial tenglamaga ega boʻlamiz, uning umumiy yechimi

Funksiya bilan tasvirlanadi, bunda C-ixtiyoriy konstanta.

Shunday qilib, boshlangʻich differensial tenglamaning umumiy yechimi parametrik koʻrinishda ikkita algebraik tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi.

Ushbu sistemadan p parametrni yoʻqotsak, u holda umumiy yechimni oshkor koʻrinishda ifodalash mumkin .

**Misol.** .

**Yechish.** Bu  ga nisbatan birinchi darajali tenglama.Uni x nisbatan yechamiz: .

koʻrinishda parametr kiritamiz: .

 ni ni funksijasi deb tenglikni ikkala tomanini y bo‘ yicha differensiallaymiz va  ni  orqali ifodalaymiz:







.

Bu ifodani berilgan tenglamaga qo‘ yib

,

hosil qilaymiz, bu yerdan у=0 xususiy yechimni ajratib

,

yoki, yangi  o‘zgarmasni kiritib,



ega boʻlamiz.

**2-hol.** Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsin.

Bu yerda ham yuqoridagi oʻxshash holat, faqat ***y*** oʻzgaruvchi *x* va oʻzgaruvchilarga oshkor bogʻliq. koʻrinishda parametr kiritamiz. Differensial tenglama ni ***x*** boʻyicha differensiallaymiz. Natijada:

yoki

Oxirgi differensial tenglamani yechib, algebraik tenglamaga ega boʻlamiz. Boshlangʻich berilgan differensial tenglama bilan quyidagicha sistemani hosil qiladi:

Ushbu Sistema berilgan differensial tenglamani umumiy yechimini parametrik koʻrinishda ifodalaydi. Ayrim hollarda sistemadan *p* parametrni yoʻqotishni iloji boʻlganda umumiy yechimni koʻrinishda yozish mumkin boʻladi.

**Misol .** differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.**   tenglikni *x* bo‘ yica differensiallasak,  hosil boʻladi.

ekanligini eʼtiborga olib, so‘ngra tenglamaning ikkala tomonini p ga qisqartirib

bu yerdan . Potensirlasak,  .

Umumiy yechimining parametrik koʻrinishiga ega boʻlamiz.

 .

Sistemadan *p* parametrni yoʻqotamib,  umumiy yechimiga ega boʻlamiz.

**3-hol.** Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsin.

Ushbu holatda differensial tenglamada ***y*** oʻzgaruvchi qatnashmaydi. koʻrinishda parametr kiritamiz. Tenglamaning umumiy yechimini qurish qiyin emas, chunki va

Oxirgi tenglamani integrallab, umumiy yechimni parametrik koʻrinishda olamiz;

**Misol.** differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.** Ushbu tenglama 3-holatga mos keladi. parametr kiritamiz va tenglamani quyidagicha koʻrinishda yozamiz:

.

Tenglamaning ikkala tomonidan ham differensial olamiz:

ekanligini eʼtiborga olsak, oxirgi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

Oxirgi ifodani intetgrallab y oʻzgaruvchini p parameter orqali ifodasini topamiz:

Bunda C-ixtiyoriy oʻzgarmas. Shunday qilib, tenglamaning umumiy yechimini parametrik koʻrinishda topdik:

Ushbu sistemadan p parametrni yoʻqotish mumkin. Ikkinchi tenglamadan topamiz:

Birinchi tenglamaga qoʻygandan keyin oshkor koʻrinishdagi umumiy yechimga ega boʻlamiz:

**4-hol.** Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsin.

Ushbu holatda differensial tenglamada ***x*** oʻzgaruvchi qatnashmaydi. koʻrinishda parametr kiritamiz. , bundan

kelib chiqadi, oxirgi ifodani integrallab, boshlangʻich diferensial tenglamani umumiy yechimining parametrik koʻrinishiga ega boʻlamiz.

**Misol.** .

**Yechish.** Berilgan tenglama 4-holatga mos keladi. parameter kiritamiz va tenglamani quyidagicha koʻrinishda yozamiz:

. Tenglamaning ikkala tomonini x bo‘ yicha differtnsiallasak,  yoki bo‘ lganligi uchun  hosil boʻladi. Umumiy yechim



boʻladi.

**2. Lagranj differensial tenglamasi**

**Taʼrif. *x*** va ***y*** ga nisbatan chiziqli boʻlgan koeffitsiyentlari esa ning funksiyalari boʻlgan ushbu

differensial tenglamaga ***Lagranj differensial tenglamasi*** deyiladi.

Ushbu tenglamani yechish algoritmi quyidagicha:

1. Umumiy yechimni topish uchun oʻzgaruvchi almashtiriladi.

Differensial tenglama quyidagicha koʻrinishga keltiriladi:

1. Ushbu tenglamani ekanligini eʼtiborga olib differensiallaymiz.



chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

Bu yerda  yechim alohida aniqlanadi

1. *x* ga nisbatan chiziqli boʻlgan bu differensial tenglamaning yechimi *x=F(p,c)* boʻlsa, u holda Lagranj differensial tenglamasining umumiy yechimi quyidagicha boʻladi:

.

**Misol.** differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.**   tenglikni differensiallasak,





.

Tenglikni ikkala tomonini  bulamiz:





.

Bu tenglamani integrallab,  ni olamiz.

Demak,

, , 

integral chiziqlar sinfi Lagranj tenglamasini yechimini beradi.

**3. Klero differensial tenglamasi**

**Taʼrif. *x*** va ***y*** ga nisbatan chiziqli boʻlgan koeffitsiyentlari esa ning funksiyalari boʻlgan quyidagi

differensial tenglamaga ***Klero differensial tenglamasi*** deyiladi.

Klero differensial tenglamasi Lagranj differensial tenglamasining xususiy holi hisoblanadi. Ushbu differensial tenglamani yechish algoritmi quyidagicha:

Oxirgi ifodani *dx* ga boʻlamiz

Birinchi yechim: .

Ikkinchi yechim esa: parametrik tenglamalar sistemasini yechish orqali hosil qilinadi. Hosil boʻlgan *F(x,y)=*0 ikkinchi yechim ixtiyoriy oʻzgarmas sonni oʻz ichiga olmaydi va umumiy yechimdan ham C ning biror bir qiymati orqali hosil qilinmaydi, demak xususiy yechim emas. Bunday yechimlar maxsus yechim (integral) hisoblanadi. Shunday qilib Klero tenglamasining maxsus yechimi umumiy yechim (integral) bilan berilgan toʻgʻri chiziqlar oilasining egilish chizigʻini aniqlaydi, boshqacha qilib aytganda, maxsus yechimning ixtiyoriy nuqtasiga oʻtqazilgan urinma ham differensial tenglama yechimi boʻladi.

Klero differensial tenglamasi koʻp hollarda analitik geometriyada 2-tartibli egri chiziqlarni qurish uchun ishlatiladi. Egri chiziqni uning urinmasiga qoʻyilgan xossalari boʻyicha aniqlaydigan geometrik masalalar Klero tenglamasiga olib keladi. Ushbu xossa aynan urinmaga tegishli boʻlib, urinadigan nuqtaga tegishli emas. Haqiqatdan ham urinma tenglamasi:

Urinmaning har qanday xossasi va oʻrtasidagi munosabat bilan aniqlanadi:

=0.

Ushbu tenglamani ga nisbatan yechilsa, aynan

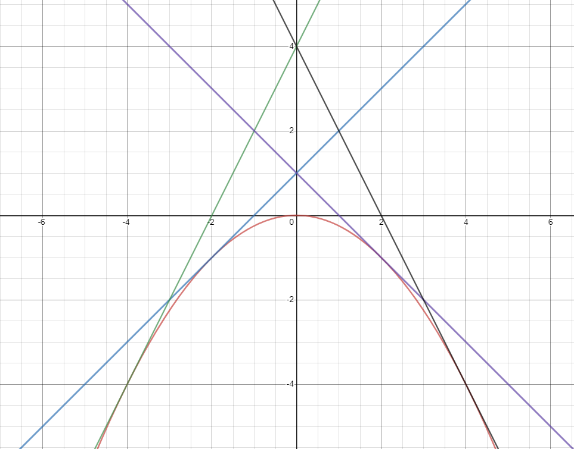
Klero tenglamasiga kelamiz.

**Misol.**

Oxirgi ifodani *dx* ga boʻlamiz

– ushbu tenglama mumkin boʻlgan ikki xil yechimga ega.

3)

1-yechim: Klero tenglamasining umumiy integrali (yechimi) toʻgʻri chiziqlar oilasini tashkil qiladi.

2-yechim: yechim parametrik koʻrinishda tenglamalar sistemasidan topiladi:

ikkinchi yechimni topamiz

Ikkinchi yechim ixtiyoriy oʻzgarmas sonni oʻz ichiga olmaydi va umumiy yechimdan ham C ning biror bir qiymati orqali hosil qilinmaydi, demak xususiy yechim emas. Bunday yechimlar *maxsus yechim* hisoblanadi.

**Mavzu yuzasidan savollar**

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?

2. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglama qanday hisoblanadi?

3. Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsa qanday yechiladi?

4. Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsa qanday yechiladi?

5. Differensial tenglama koʻrinishda boʻlsa qanday yechiladi?

6. Lagranj differensial tenglamasi deb qanday tenglamaga aytiladi?

7. Klero differensial tenglamasi deb qanday tenglamaga aytiladi?

8. Lagranj va Klero differensial tenglamalari umumiy yechimi qanday aniqlanadi?

6-mavzu. TARTIBI PASAYADIGAN YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

**Reja**

**1. tartibli differensial tenglamalar.**

**2. – koʻrinishdagi differensial tenglamalar.**

**3. Noma‘lum funksiya oshkor qatnashmagan differensial tenglamalar**

**.**

**4. Erkli oʻzgaruvchi oshkor qatnashmagan differensial tenglamalar**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** *n*-tartibli differensial tenglama, *n*-tartibli differensial tenglamning umumiy yechimi, – ko‘rinishdagi differensial tenglama,noma‘lum funksiya oshkor qatnashmagan,erkli oʻzgaruvchi oshkor qatnashmagan.

1. **tartibli differensial tenglamalar.**

**Taʼrif.** Agar differensial tenglamada ***y(x)*** funksiyaning ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilasi qatnashsa

(1)

bunday differensial tenglama **yuqori tartibli** yoki **n-tartibli differensial tenglama** deyiladi.

Agar buni *n*-tartibli hosilaga nisbatan yechib boʻlsa,

(2)

oshkor shakldagi n-tartibli differensial tenglama hosil bo‘ladi.

– lar ixtiyoriy kombinatsiyada qatnashishi mumkin, ayrimlari qatnashmasligi ham mumkin, faqatgina n-tartibli hosila ni qatnashishi shart.

Bunday tenglamalar uchun ham yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema oʻrinlidir.

**Teorema.**Agar tenglamada funksiya va uning argumentlari boʻyicha olingan xususiy hosilalari qiymatlarni oʻz ichiga olgan biror sohadagi uzluksiz funksiyalardan iborat boʻlsa, bu holda tenglamaning

shartlarini qanoatlantiruvchi yechim **mavjud va yagonadir**.

**Taʼrif.** *n*-tartibli differensial tenglamning umumiy yechimi deb n ta ixtiyoriy oʻzgarmas miqdorga bogʻliq boʻlgan shunday

funksiyaga aytamizki, bu funksiya:

1. ixtiyoriy oʻzgarmas miqdorlarning har qanday qiymatlarida ham tenglamani qanoatlantiradi;
2. Berilgan boshlangʻich shartlarda larni shunday tanlab olish mumkinki, funksiya bu boshlangʻich shartlarni qanoatlantiradigan boʻladi.

Umumiy yechimni oshkormas holda aniqlovchi koʻrinishdagi munosabat differensial tenglamaning **umumiy integrali** deyiladi.

Umumiy yechimdan oʻzgarmas miqdorlarning tayin qiymatlarida hosil boʻladigan har qanday funksiya **xususiy yechim** deb ataladi. Xususiy yechimning grafigi berilgan differensial tenglamaning **integral egri chizigʻi** deyiladi.

Yuqori tartibli differensial tenglamalardan eng ommabopi 2-tartibli differensial tenglamalardir:

- larning ayrimlari yoki hattoki hammasi qatnashmasligi ham mumkin, muhimi ni qatnashishi shart. Eng primitiv 2-tartibli differensial tenglama

Amaliy masalalarda taklif qilinayotgan yuqori tartibli differensial tenglamalar ikkita asosiy guruhga boʻlinadi:

1. Tartibini pasaytirish mumkin boʻlgan differensial tenglamalar;
2. Oʻzgarmas koeffitsiyentli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Tartibini pasaytirish mumkin boʻlgan differensial tenglamalarning uchta asosiy tipini o‘rganamiz:

1. – koʻrinishdagi differensial tenglamalar;
2. funksiya oshkor qatnashmagan differensial tenglamalar:

– hammasi bor, ***y*** yoʻq.

1. Erkli oʻzgaruvchi x oshkor qatnashmagan differensial tenglamalar:

– hammasi bor, ***x*** yoʻq.

**– koʻrinishdagi differensial tenglamalar.**

- differensial tenglamani yechish uchun chap va oʻng tomonni takror integrallash usulidan foydalaniladi. Integrallashni n marta amalga oshirishga toʻgʻri keladi. Agar differensial tenglamaning mos berilgan boshlangʻich shartlarida xususiy yechimi qidirilayotgan boʻlsa, har bir integrallashdan keyin mos boshlangʻich shartdan foydalanib, integrallash natijasida yuzaga keladigan C- konstantalarni topishga toʻgʻri keladi.

**Misol 1**. **.**

**Yechish.**Algoritmga koʻra ketma-ket uch marta integrallaymiz:

1. Differensial tenglama darajasini 2-tartibgacha tushiramiz

dan foydalanamiz

1. Differensial tenglama darajasini 1-tartibgacha tushiramiz:
2. Oxirgi integralni olamiz:

Shunday qilib xususiy yechim

,

**Eslatma:** Differensial tenglamaning tartibi nechta boʻlsa, shuncha konstanta boʻladi.

**3. Noma‘lum funksiya oshkor qatnashmagan differensial tenglamalar**

**.**

Bunday koʻrinishdagi differensial tenglamalarda ***y*** – qatnashmaydi, lekin yechish jarayonida paydo boʻladi.

Birinchi tartibli hosila ham qatnashmasligi mumkin:

Bunday tenglamalarning barchasida bogʻliq boʻlmagan ***x*** oʻzgaruvchi va ***y*** ning yuqori tartibli hosilasi qatnashadi. Bunday tenglamalar

oʻzgaruvchi almashtirish natijasida differensial tenglamaning tartibi pasaytiriladi:

**Misol 2.**

**Yechish.**

1. *p=p(x)*-*x* ning funksiyasi differensial tenglamaga qoʻyamiz
2. – natijada chiziqli bir jinsli boʻlmagan birinchi tartibli differensial tenglamaga kelamiz. Bunday tenglamalarni esa Bernulli yoki oʻzgarmasni variatsiyalash usuli bilan yechiladi
3. Oʻzgarmasni variatsiyalash usuli boʻyicha yechamiz, buning uchun:

yordamchi tenglamani yechamiz

1. *c=u(x)*
2. .

**4. Erkli oʻzgaruvchi oshkor qatnashmagan differensial tenglamalar**

yoki

Bunday differensial tenglamalarni yechish uchun ham oʻzgaruvchi almashtirish bajarib, differensial tenglama tartibini pasaytiramiz, lekin bu holatda nozik bir holatga eʼtibor qaratish lozim:

belgilash kiritsakda, p – y ning qandaydir funksiyasi, y – esa x ning funksiyasi hisoblanadi. Shuning uchun ham murakkab funksiya hosilasi quyidagicha boʻladi:

boʻladi.

**Misol.**

**Yechish.**

1. Belgilash kiritamiz: differensial tenglamaga qoʻyamiz
2. Soddalashtirishlardan soʻng: oʻzgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga kelamiz va uni yechamiz
3. Teskari oʻzgaruvchi almashtirish bajaramiz:

Shunday qilib differensial tenglamaning yechimini quyidagicha boʻladi:

.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Qanday differensial tenglama yuqori tartibli yoki *n*-tartibli differensial tenglama deyiladi?
2. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar haqida ma’lumot bering.
3.  ko‘rinishidagi differensial differensial tenglamaning yechish usulini keltiring.
4. Erkli o‘zgaruvchi oshkor qatnashmagan differensial tenglamani yechish usulini keltiring.
5. Noma‘lum funksiya qatnashmagan yuqori tartibli differensial tenglamani yechish usulini keltiring.

|  |
| --- |
| **7-maʼruza. YUQORI TARTIBLI CHIZIQLI DIFFЕRЕNSIAL TЕNGLAMALAR. VRONSKIAN. FUNDAMENTAL YECHIM. ASOSIY TEOREMALAR.** |

**Reja**

**1. Yuqori tartibli chiziqli diffеrеnsial tеnglamalar.**

**2. Vronskian. Fundamental yechim.**

**3. Asosiy teoremalar.**

***Tayanch so‘z va iboralar.*** Yuqori tartibli chiziqli diffеrеnsial tеnglama, chiziqli bir jinsli tenglama, chiziqli bog‘liq , chiziqli erkli sistema,vronskian, fundamental yechim.

**1. Yuqori tartibli chiziqli diffеrеnsial tеnglamalar.**

**1-ta’rif.**Agar ***n*** tartibli diffеrеnsial tеnglamada izlanayotgan funksiya va uning hosilalari 1– darajada qatnashsa, bunday tеnglama ***yuqori tartibli chiziqli diffеrеnsial tеnglama*** dеyiladi.

n-tartibli oddiy differensial tenglamalarning muhim xususiy hollaridan biri, n-tartibli chiziqli differensial tenglama bo‘lib, u quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

,

bu еrda ) funktsiyalar ***x*** ning ma’lum uzluksiz funksiyalari (yoki sonlar bo‘lishi ham mumkin) tеnglamani koeffitsiyеntlari dеyiladi, shu bilan birga (agar bo‘sa, tеnglama hadlarini ga bo‘lamiz) bulsa, u holda

(1)

tenglamani hosil qilamiz.

funksiyaga tеnglamani **o‘ng tomoni** yoki **ozod hadi** dеyiladi.

Agar bo‘lsa, u holda

(1)-tеnglama ***chiziqli bir jinsli boʻlmagan*** (yoki oʻng tomonli yoki ozod hadli) tenglama deyiladi.

Agar bo‘lsa, u holda (1)-tеnglama

(2)

ko‘rinishga ega bo‘lib, ***chiziqli bir jinsli tеnglama*** (yoki **oʻng tomonsiz** yoki **ozod hadi boʻlmagan**) tenglama deyiladi.

(2) tеnglamaning chap tomoni larga nisbatan bir jinslidir.

**1-tеorеma.** Agar funksiya (2)-tеnglamaning yеchimi bo‘lsa, u holda funksiya ham bu tеnglamani yеchimi bo‘ladi.

**Isbot.** yеchim bo‘lsa (2)- ni qanoatlantiradi, yani:

. (3)

Endi ni tеnglamaga qo‘yamiz:

(4)

(4) –tеnglamani ga bo‘lib, (3) ni hosil qilamiz. Dеmak, ham yеchim bo‘lar ekan. Tеorеma isbot bo‘ldi.

**2-tеorеma.** Agar (2) tenglamaning yechimlari bo‘lsa, funksiya ham bu tеnglamaning yеchimi bo‘ladi.

***Isboti:*** ,

**Natija.** Agar funksiyalar (2)-tеnglamaning yеchimlari bo‘lsa, u holda ularning chiziqli kombinatsiyasi

ham bеrilgan tеnglamaning yеchimi bo‘ladi.

ifoda n ta ixtiyoriy oʻzgarmasni oʻz ichiga oladi va n-tartibli differensial tenglamani qanoatlantiradi. Ixtiyoriy oʻzgarmaslar qatnashgan bu yechim umumiy yechim boʻlishi uchun ixtiyoriy oʻzgarmaslarni ular boshlangʻich shartlarining istalgan berilgan sistemasini qanoatlantiradigan yagona usul bilan tanlash imkoniyati mavjud boʻlishi kerak. Bunday imkoniyat mavjudmi yoki yoʻqmi ekanini aniqlash uchun funksiyalarning chiziqli bogʻliqlik va chiziqli erkli (bogʻliq emaslik) tushunchalarini kiritish kerak boʻladi.

**2-taʼrif.** Agar bir vaqtda nolga teng boʻlmagan n ta sonlar mavjud boʻlib, barcha lar uchun

аyniy munosabatlar bajarilsa, [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar sistemasi [a,b] kesmada **chiziqli bogʻliq** deyiladi.

Agar, masalan, deb faraz qilsak, (5) munosabatni quyidagicha yozish mumkin:

bu yerda

Shuning uchun funksiyalar sistemasining chiziqli bogʻliqligi sistemaning funksiyalaridan hech boʻlmaganda bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat boʻlishini bildiradi. Xususan, ikkita: va funksiya yoki , yaʻni ularning nisbati oʻzgarmas son boʻlganda chiziqli bogʻliq boʻladi.

**3-taʼrif.** Agarmunosabat faqat

shartda bajarilsa, [*a,b*] kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar sistemasi **chiziqli erkli** deyiladi.

Xususan ikkita: va funksiya yoki , yaʻni ularning nisbati oʻzgarmas songa teng boʻlmaganda chiziqli erkli boʻladi.

**1-misol.** Ushbu , funksiyalar sistemasi barcha lar uchun chiziqli bogʻliq. Haqiqatdan ham

da x uchun quyidagiga egamiz:

**2-misol.** Ushbu

funksiyalar sistemasi chiziqli bogʻliq. Haqiqatdan ham,

da istalgan ***x*** uchun quyidagiga egamiz:

**3-misol.** Ushbu

Funksiyalar sistemasi chiziqli erkli.

Haqiqatdan ham

Tenglik ***x*** ning ***n*** dan katta boʻlmagan qiymatlari (***n***-darajali tenglama ildizlari) uchun oʻrinli. Qolgan hollarda tenglik boʻlganda oʻrinli.

**4-misol.** Ushbu funksiyalar sistemasi chiziqli erkli. Haqiqatdan ham, tenglik faqatgina boʻlgandagina oʻrinli. Funksiyalar soni ikkita boʻlganda ularning chiziqli erkliligini bu funksiyalarning nisbatidan foydalanib aniqlash mumkin. boʻlib, barcha ***x*** lar uchun oʻzgarmas son boʻlmagani sababli lar chiziqli erkli.

**2. Vronskian. Fundamental yechim.**

**4-ta’rif.** marta diffеrеnsiallanuvchi funksiyalar sistеmasining ***Vronskiy dеtеrminanti*** yoki ***vronskiani*** dеb

dеtеrminantga aytiladi.

Bu dеtеrminant ***x*** ning funksiyasi bo‘lib, kabi bеlgilanadi. Bu dеtеrminant funksiyalarning chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli ekanini o‘rganish vositasi bo‘lib xizmat qiladi .

**3-tеorеma.** Agar funksiyalar sistеmasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, bu sistеmaning ***Vronskiy*** dеtеrminanti funksiya aniqlangan barcha nuqtalarida aynan nolga tеng bo‘ladi.

**Eslatma:** Teoremadan funksiya aniqlangan nuqtalarning hech boʻlmaganda bittasida boʻlsa, funksiyalar sistemasi bu sohada chiqilli erkli boʻlishi kelib chiqadi.

**5-misol.**  – funksiyalar sistemasi -lar turlicha boʻlganda barcha x lar uchun chiziqli erkli ekanligini koʻrsating:

**Yechish.** Vronskiy determinantini tuzamiz va uni hisoblaymiz:

=

Barcha *x* lar uchun. Demak -lar turlicha boʻlganda, – funksiyalar sistemasi barcha *x* lar uchun chiziqli erklidir.

**4- tеorеma:** Agar funktsiyalar chiziqli erkli va (2) chiziqli bir jinsli tеnglamaning yеchimlari bo‘lsa, u holda bu funksiyaning Vronskiy dеtеrminanti tеnglamaning koeffitsiyеntlari aniqlangan sohaning hеch bir nuqtasida nolga tеng bo‘lmaydi.

**Natija.** Chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning yechimlari boʻlgan funksiyalar sistemasining Vronskiy determinant yoki aynan nol, yoki hech bir nuqtada nolga teng boʻlmaydi. Bu yechimlar sistemasi yoki chiziqli bogʻliq, yoki chiziqli erkli boʻlishidan kelib chiqadi.

**5-taʼrif.** n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning n ta chiziqli erkli yechimlari sistemasi uning ***fundamental yechimlar sistemasi*** deyiladi.

**3. Asosiy teoremalar.**

**5-teorema. *n***-tartibli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglamaning ***n*** ta yеchimi uning fundamеntal yechimlar sistеmasini tashkil etishi uchun ularning Vronskiy determinant noldan farqli boʻlishi zarur va yetarlidir.

**6-teorema.** Uzluksiz  koeffitsiyentli (2) ko‘rinishdagi bir jinsli differensial tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi mavjud.

**7-tеorеma.**(***Diffеrеnsal tеnglama umumiy yеchimining strukturasi to‘g‘risida*)** ***n***-tartibli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglamaning ***n*** ta yеchimi uning fundamеntal yechimlar sistеmasi bo‘lsa, u holda bu tеnglamaning umumiy yеchimi bu yеchimlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi, ya’ni

bu yеrda lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

**6-misol.**  differensial tenglamaning umumiy integralini toping.

**Yechish.** Berilgan tenglama ikkita  va  xususiy yechimlarga ega buladi. Bularni chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli ekanini tekshirish uchun Vronskiy determinantini tuzamiz:

.

Demak,  va  lar fundamеntal yechimlar sistеmasini tashkil etadi va tеnglamaning umumiy yеchimi  buladi.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1.Yuqori tartibli chiziqli diffеrеnsial tеnglama deb nimaga aytiladi?

2.Chiziqli bir jinsli bo ‘lmagan diffеrеnsial tenglama nima?

3.Chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tenglama nima?

4.Chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tenglama yechimlari haqidagi teoremalarni ayting.

5.Chiziqli erkli funksiyalar sistemasini ta’riflang.

6.Chiziqli bog‘liq funksiyalar sistemasini ta’riflang.

7.Vronskiy determinant(vronskian)ni ta’riflang.

8.Qachon Vronskiy determinanti aynan nolga teng?

9.Qachon Vronskiy determinanti aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida nolga teng bo‘lmaydi?

10.Fundamental yechimlar sistemasi deb nimaga aytiladi?

**8-mavzu. OʻZGARMAS KOEFFITSIYENTLI CHIZIQLI BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. XARAKTERISTIK TENGLAMA.**

**Reja**

**1. n-tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama.**

**2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama.**

***Tayanch so‘z va iboralar.*** O‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama, xarakteristik ko‘phad, xarakteristik tеnglama, Vandervond determinanti.

**1.n-tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama.**

Agar bir jinsli differensial tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi (F.Y.S.) ma’lum bo’lsa, u holda uning ixtiyoriy yechimini topish mumkin.

Oldingi paragraflarda *n*-tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning F.Y.S ning mavjudligi haqidagi teoremani isbotlagan edik. Lekin F.Y.S ni topish masalasi bilan shug’ullanmaganmiz.

Mazkur ма’ruzada, agar *n*-tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglama o’zgarmas koeffitsiyentli bo’lsa, u holda uning F.Y.S ni topish mumkinligini ko’rsatamiz.

Ushbu

 (1)



differensial tenglamani qaraymiz. Bu yerda ,  haqiqiy o’zgarmas sonlar. O’zgarmas koeffitsiyentli (1) ko’rinishdagi differensial tenglamaning muhimligi shundaki, uning F.Y.S ni topish masalasi n-darajali algebraik tenglamaning ildizlarini o’rganish masalasiga keltiriladi.

Avvalo (1) differensial tenglamaning biror xususiy yechimini

  (2)

ko‘rinishda izlaymiz. Bu funksiyani ketma-ket n-marta differensiallab



hosilalarni topamiz. So‘ngra  ni hisoblaymiz:

. (3)

Bunda, ushbu

 (4)

n-darajali ko‘phadga (1) differensial tenglamaning **xarakeristik ko‘phadi** deyiladi.

Agar biror  soni (4) xarakteristik ko’phadning ildizi, ya’ni



bo’lsa, u holda  bo’lib,  funksiya (1) differensial tenglamani-

ng xususiy yechimidan iborat bo’ladi. Bizga algebra kursidan ma’lumki,

 (5)

**xarakteristik tenglamani n ta ildizi mavjud.**

1. Avvalo (5) xarakteristik tenglama n ta har xil oddiy ildizlarga ega bo’lgan holni ko’rib chiqamiz. Aniqlik uchun ushbu

 (6)

sonlar (5) xarakteristik tenglamaning har xil ,  oddiy ildizlari, ya’ni  bo’lsin. U holda (6) ko’rinishdagi ildizlarga (1) differinsial tenglamaning

 (7)

ko’rinishdagi xususiy yechimlari mos keladi. Bu yechimlar (1) differensial tenglamaning F.Y.S ni tashkil qilishini ko’rsatamiz. Shu mqasadda (7) yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinantini tuzamiz va uning son qiymatini topamiz:





Algebra kursida oxirgi determinantga **Vandermond determinanti** deyiladi.

U noldan farqli bo’lishi uchun  larning har xil bo’lishi zarur va yetarli. Shunday

qilib, agar  lar har xil bo’lsa, u holda (1) differensial tenglamaning



yechimlari chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi. Shuning uchun ular (1) differensial tenglamaning F.Y.S ni tashkil qiladi. Demak, (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi

 (8)

ko‘rinishda ifodalanadi. Bu yerda  - ixiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Faraz qilaylik, (5) xarakteristik tenglamaning  ildizlari orasida kompleks ildizlar ham bo‘lsin. Masalan, , , ,  bu ildizlarga ushbu



ko‘rinishida kompleks yechimlar mos keladi. Quyidagi



tengliklar o’rinli bo’lgani uchun, ushbu

  (9)

 va  funksiyalar ham (1) differensial tenglamaning yechimlaridan iborat bo‘ladi.

Endi {}=F.Y.S da (5) xarakteristik tenglamaning kompleks ildizlariga mos keluvchi har bir ,  - kompleks qo‘shma yechimlari juftliklarini , -haqiqiy yechimlari juftligi bilan almashtiramiz. Shu bilan bir qatorda  ko‘rinishidagi haqiqiy yechimlarini  deb olamiz. Natijada (1) differensial tenglama , …- haqiqiy yechimlarga ega bo‘ladi. Bu yechimlarning ixtiyoriy  intervalda chiziqli erkli ekanligini ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, biror  sonlar uchun ushbu

, 

tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu yerda , …larni  lar bilan almashtirib,



munosabatni hosil qilamiz. Bunda ,  va xuddi shuningdek, , - kompleks qo‘shma juftlik uchun , ; haqiqiy  uchun esa , deb olamiz. Agar birorta  bo‘lsa, u holda  topilib,  funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Bu esa (5) xarakteristik tenglamani har xil ildizlariga mos keluvchi  yechimlarining chiziqli bog‘lanmaganligiga zid. Shuning uchun barcha ,  bo‘lib, , …yechimlar chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi.

Shunday qilib (5) xarakteristik tenglamaning oddiy  ildizlariga haqiqiy funksiyalardan tashkil topgan F. Y.S mavjud ekan. Xarakteristik tenglamaning har bir haqiqiy  ildizlariga ko‘rinishdagi funksiyalar va uning qo‘shma kompleks ,  ildizlariga esa ,  ko‘rinishdagi funksiyalar (1) differensial tenglamaning F.Y.S ni tashkil qiladi.

**2. Karrali ildizlar holi.** Avvalo  ga nisbatan, (1) tenglamaning chap tomonidagi L[y] ifodaning qiymatini hisoblaymiz. Bu yerda  - butun son.

Teorema-1. Agar  soni (5) xarakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo‘lsa, u holda

 (10)

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda 

1. Aytaylik soni, ushbu



xarakteristik ko‘phadning k=2 ikki karrali ildizi, ya’ni

, , 

bo‘lsin. Bu holda



munosabatga ega bo‘lamiz. Demak ikki karrali ildizga tenglamaning

, 

xususiy yechimlari mos keladi.

2. Aytaylik soni  xarakteristik tenglamaning uch karrali ildizi,

ya’ni , ,  bo‘lsin. Qaralayotgan holda formuladan foydalanib,



tenglikni olamiz. Demak, uch karrali ildiz holiga differensial tenglamaning

, , 

ko‘rinishdagi xususiy yechimlariga ega bo‘lamiz.

Demak (5) xarakteristik tenglamaning k karrali  ildiziga (1) differensial tenglamaning

, , ,…, 

ko‘rinishdagi xususiy yechimlar mos kelar ekan.

Faraz qilaylik,



xarakteristik tenglama  har xil ildizlarga ega bo‘lib, ular mos ravishda  karrali bo‘lsin.

**Teorema-2.** 1)  xarakteristik tenglamaning karrali  ildiziga (1) differensial tenglamaning  ta

, , ,…,  (11)

xususiy yechimi mos keladi.

2) Ushbu

{, , ,…, }, 

ko‘rinishdagi barcha yechimlar (1) differensial tenglamaning F.Y.S ni tashkil qiladi.

**Natija-2.** Aytaylik  xarakteristik tenglama  karrali   har xil ildizlarga ega bo‘lsin. U holda (1) differensial tenglamaning ixtiyoriy yechimi



ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday ko‘rinishdagi funksiya (1) differensial tenglamaning yechimidan iborat bo‘ladi.

Bu yerda



 darajali ko‘phad bo‘lib, uning  koeffitsiyentlari ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. Yuqoridagi tasdiqni quyidagicha ham bayon qilish mumkin.

**Lemma-2**. Agar ushbu

,  (12)

tenglik ixtiyoriy  lar uchun bajarilsa, u holda barcha  ko‘phadlarning koeffitsiyentlari nolga teng bo‘ladi. Bu yerda lar xarakteristik tenglamaning  karrali har xil ildizlari.

2. Agar  xarakteristik tenglama  karrali  ko‘rinishdagi kompleks ildizga ega bo‘lsa, u holda bu ildizga (1) differensial tenglamaning

 (13)

ko’rinishdagi yechimlari mos keladi. Eyler formulasiga ko‘ra



tenglikni yozish mumkin. (13) yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib quyidagi 2r ta haqiqiy yechimlarini hosil qilamiz:

, (14)

.

 xarakteristik tenglamaning  karrali qo‘shma kompleks  ildiziga ham (14) ko‘rinishdagi chiziqli bog‘lanmagan yechimlar mos keladi.

Shunday qilib, xarakteristik tenglamaning r karrali kompleks ildiziga (1) differensial tenglamaning (14) ko‘rinishdagi  ta haqiqiy yechimlari mos keladi.

**2.Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama.**

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama dеb

(15)

ko‘rinishdagi tеnglamaga aytiladi (bu yеrda ***p*** va ***q*** o‘zgarmas haqiqiy sonlar).

Yuqoridagi tеorеmaga asosan bu tеnglamaning umumiy еchimini qurish uchun uning 2 ta chiziqli erkli xususiy еchimini topish еtarlidir. Tеnglamani yеchish uchun dеb faraz qilamiz . U holda

bo‘ladi. Bularni (15)-tеnglamaga qo‘yib

ni hosil qilamiz. Oxirgi tеnglikni ga hadlab bo‘lib

(16)

ni topamiz. **Bu tеnglamaga (15)- diffеrеnsial tеnglamaning xaraktеristik tеnglamasi dеyiladi.** Uning ildizlari

yoki

formulalardan topiladi.

**Bu yеrda quydagi uch hol bo‘lishi mumkin:**

1. **Xaraktеristik tеnglamaning ildizi ikkita, haqiqiy, har xil sonlar, ya’ni .** Bu holda (15)- diffеrеnsial tеnglamaning umumiy еchimi

formuladan topiladi;

**Misol:**

.

.

1. **Xaraktеristik tеnglamaning ildizi ikkita, haqiqiy, bir xil sonlar, ya’ni** . Bu holda (15)- diffеrеnsial tеnglamaning umumiy yеchimi

formuladan topiladi;

**Misol:**

.

.

Agar ikkala yechim ham boʻlsa, umumiy yechim yana soddalashadi:

konstantalar.

Aynan primitiv differensial tenglamaning yechimi boʻladi:

**3) Xaraktеristik tеnglamaning ildizi ikkita, qo‘shma komplеks sonlar, ya’ni**

**, bu yеrda .**

Bu holda (15)- diffеrеnsial tеnglamaning umumiy yеchimi

formuladan topiladi.

**Misol:**



Yuqori tartibli chiziqli, bir jinsli diffеrеnsial tеnglamalar ham shunday yеchiladi.

Yuqori tartibli bir jinsli differensial tenglamalar:

Bunday differensial tenglamalarni yechish uchun tushunarlliki

1. Xarakteristik tenglamani tuzish lozim:

Kubik tenglama 3 ta ildizga ega (***n*** – tartibli tenglama ***n*** ta ildizga ega)

Agar ildizlar har xil haqiqiy ildizlar boʻlsa, masalan: boʻlsin, u holda umumiy yechim quyidagicha:

konstantalar

Agar bitta ildiz haqiqiy , qolgan ikkitasi qoʻshma kompleks ildiz boʻlsa:

u holda yechim quyidagicha boʻladi:

Agar uchta ildiz ham karrali boʻlsa: u holda umumiy yechim:

konstantalar

Xususan boʻlsa, umumiy yechim:

konstantalar

Xuddi shunday oʻzgarmas koeffitsiyentli 4-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalarda ham

.

Mos xarakteristik tenglama:

Har doim 4 ta yechimga ega boʻladi, umumiy yechim xuddi yuqorida aytilgan prinsipda yoziladi, faqatgina 4 ta ildiz ham karrali boʻlganda, masalan boʻlsa, umumiy yechim quyidagicha:

konstantalar, ko‘rinshda boʻladi.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Qanday differensial tenglama *n-*tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglama deyiladi?
2. Qanday tenglamaga *n-*tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi?
3. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli diffеrеnsial tеnglamaning yechish usulini ayting.
4. Xaraktеristik tеnglamaning ildizi ikkita, haqiqiy, har xil sonlar bo‘lganda umumiy yechim ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
5. Xaraktеristik tеnglamaning ildizi ikkita bir xil sonlar bo‘lganda umumiy yechim ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
6. Xaraktеristik tеnglamaning ildizi ikkita o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar bo‘lganda umumiy yechim ko‘rinishi qanday bo‘ladi?

**9-mavzu OʻNG TOMONI MAXSUS KOʻRINISHDA BOʻLGAN OʻZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI BOʻLMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.**

**Reja**

**1.Oʻng tomoni maxsus koʻrinishda boʻlgan oʻzgarmas koeffitsiyentli bir jinsli boʻlmagan chiziqli differensial tenglama.**

**2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Oʻng tomoni maxsus koʻrinish, bir jinsli qismi, analitik jihatdan aniq yechilmaydigan differensial tenglamalar, differensial tenglamaning taqribiy yechimi, tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

**1. Oʻng tomoni maxsus koʻrinishda boʻlgan oʻzgarmas koeffitsiyentli bir jinsli boʻlmagan chiziqli differensial tenglama.**

Ushbu

 (1)

bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamani qaraylik. Shu bilan bir qatorda quyidagi

 (2)

bir jinsli differensial tenglamani ham qaraymiz. Bu yerda

 (3)

**Teorema-1.** Agar  funksiyalar (2) differensial tenglamaning F.Y.S dan iborat boʻlib,  funksiya (1) differensial tenglamaning birorta xususiy yechimi boʻlsa, u holda (1) differensial tenglamaning ixtiyoriy yechimi

 (4)

koʻrinishda boʻladi. Bunda  ixtiyoriy oʻzgarmas sonlar.

**Isbot.** Ushbu  ayirmani qaraymiz. Teorema shartiga koʻra



munosabatlar oʻrinli. Bu tengliklardan foydalanib L[z] ifodaning qiymatini hisoblaymiz:



Bundan oʻz navbatida z(x) funksiya (2) differensial tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun z(x) funksiya (2) bir jinsli differensial tenglamaning {} =F.Y.S orqali ifodalanadi:

 (6)

(5) va (6) tengliklardan ushbu



tasvir kelib chiqadi.

Ikkinchi tartibli bir jinsli boʻlmagan chiziqli oʻzgarmas koeffitsiyentli

(7)

differensial tenglama berilgan boʻlsin.

Juqoridagi teoremaga qoʻra (7)-tenglamani umumiy yechimi



koʻrinishda boʻladi.

Endi, (7) bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamaning - xususiy yechimlarini topish bilan shugʻullanamiz. Agar oʻng tomoniga  maxsus koʻrinishda boʻlsa, u holda - xususiy yechim quyidagich topiladi:

1. Agar  va α xarakteristik tenglamani ildizlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechimi



koʻrinishda boʻladi.

2. Agar  va α xarakteristik tenglamani bitta ildizlari bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechimi



koʻrinishda boʻladi.

3. Agar  va α xarakteristik tenglamani ikkita ildizlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechimi



koʻrinishda boʻladi.

4. Agar  va  son xarakteristik tenglamani ildizlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechimi



koʻrinishda boʻladi, bu erda  -koʻphadlarni darajasi.

5. Agar  va son xarakteristik tenglamani ildizlari bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechimi

,

koʻrinishda boʻladi, bu erda  -koʻphadlarni darajasi,.

Agar boʻlsa, u holda xususiy yechimi 

koʻrinishda boʻladi, bu erda  xususiy yechimi, oʻng tomoniga mos, - xususiy yechimi,  oʻng tomoniga mos .

**(7) korinishdagi differensial tenglamalarni yechish algoritmi quyidagicha:**

1. Mos bir jisli differensial tenglamani yechish lozim:

(8)

tenglamani umumiy yechimini topamiz va uni kabi belgilaymiz.

1. Bir jinsli boʻlmagan tenglamaning biror bir xususiy yechimi ni topamiz. Buning uchun aniqmas koeffitsiyentlar usuli asosida xususiy yechim tanlanadi.
2. Bir jinsli boʻlmagan (7) differensial tenglamaning umumiy yechimi esa

(9)

koʻrinishda boʻladi.

Agar masalaning boshida Koshi masalasi berilgan boʻlsa, u holda 4-bosqich ham qoʻshiladi.

1. Boshlangʻich shartlarni bajaruvchi xususiy yechim topiladi.

Yuqorida keltirilgan algoritmning 2-bosqichiga alohida toʻxtalib oʻtamiz. Xususiy yechim koʻrinishini tanlash tenglamaning oʻng tomonida turgan ***f(x)*** funksiyaning koʻrinishiga hamda bir jinsli tenglamaga mos xarakteristik tenglamasi ildizlari va larga bogʻliq. Duch kelishimiz mumkin boʻlgan turli hollarga toʻxtalib oʻtamiz:

1. Aytaylik (2) tenglamaning xarakteristik tenglamasi: ning ildizlari va lar ikkita har xil haqiaiy ildizlar boʻlib, noldan farqli boʻlsin, yaʼni u holda xususiy yechim quyidagicha qidiriladi:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Xususiy yechim |  | Xususiy yechim |
|  |  |  | , |  |
| , |  | va |  |
| va |  | va |  |
| va |  | *asinbx*  *acosbx*  *acosbx+csinbx* | *Acosbx+Csinbx* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Xususiy yechim |  | Xususiy yechim |
|  | va |  | *asinbx, acosbx*  *acosbx+csinbx* | *Acosbx+Csinbx* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | va |  |
| *(ax+b)cosdx, (ax+b)sindx*  *(ax+b)cosmx+(cx+d)sinmx* | *(Ax+B)cosmx+(Cx+D)sinmx* |
| , |  |

1. Agar va lar ikkita har xil haqiqiy ildizlar boʻlib, ulardan bittasi nolga

teng boʻlsa (aniqlik uchun keling boʻlsin) u holda ularga mos boʻlgan differensial tenglama koʻrinishi boʻlib, xususiy yechim quyidagicha qidiriladi:

**1-Qoida:** Agar oʻng tomonda nol boʻlmagan konstanta yoki koʻphad boʻlib, xarakteristik tenglamaning ildizlaridan bittasi nolga teng boʻlsa yaqqol koʻrinishdagi xususiy yechimni ***x*** ga koʻpaytirish kerak.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Xususiy yechim |  | Xususiy yechim |
|  |  |  | , |  |
| , |  |  |  |

**2-qoida:** Agar xarakteristik tenglamada ikkita 0 yechim boʻlsa, *x* ga emas ga koʻpaytirish lozim.

1. Agar xarakteristik tenglama ildizi karrali boʻlsa,

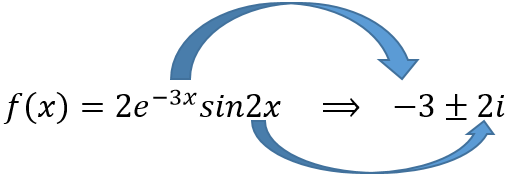
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Xususiy yechim |  | Xususiy yechim |
|  |  |  | , |  |
| , |  | va |  |
| va |  | va |  |

1. Agar xarakteristik tenglama qoʻshma kompleks ildizga ega boʻlsa:

, boʻlsin

Xususiy yechim oddiy holatdagidek topiladi, faqat quyidagicha holatlardan istisno ravishda:

Aytaylik oʻng tomoni quyidagicha boʻlsin:



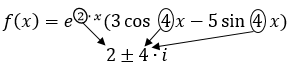
qoʻshma kompleks sonni hosil qilamiz

hosil boʻlgan kompleks son xarakteristik tenglama ildizi bilan ustma-ust tushmasa xususiy yechim:

Agar kompleks son xarakteristik tenglamaning ildizlari bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechimni oddiy tanlanishi ***x*** ga koʻpaytiriladi va xususiy yechim:

koʻrinishni oladi.

Agar koʻrinishda boʻlsa, u holda unga mos qoʻshma kompleks sonni tuzamiz:

 Agar kompleks son

kompleks son bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechim

koʻrinishda qidiriladi.

Agar kompleks son kompleks son bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechim

koʻrinishda qidiriladi.

1. Agar xarakteristik tenglama qoʻshma toza mavhum kompleks ildizga ega

boʻlsa: u holda differensialda birinchi tartibli hosila qatnashmaydi:

u holda xarakteristik tenglama toza mavhum ildizga ega boʻladi.

Xususiy yechim koʻrinishi oddiy holatdagidek amalga oshiriladi, faqatgina quyidagi holatlar bundan mustasno:

Agar qoʻshma kompleks sonni hosil qilamiz.

Agar boʻlsa, u holda xussusiy yechim

Agar b= boʻlsa, xususiy yechim

Agar qoʻshma kompleks sonni hosil qilamiz.

Agar boʻlsa, u holda xussusiy yechim

Agar b= boʻlsa, xususiy yechim

koʻrinishda boʻladi.

**Misol 1.** .

**Yechish.** .

1) 





.

2) ? , , .



.

3) .

**Misol 2.** .

**Yechish.** .

1. bir jinsli differensial tenglamani koʻrib chiqamiz;

xarakteristik tenglamasini topamiz

Xarakteristik tenglama ildizlari:

Bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi:

1. tenglamaning oʻng tomoniga mos xususiy yechimni quyidagicha tanlaymiz:

A, E, C, D – koeffitsiyentlarni topamiz:

Buning uchun uni differensial tenglamaga olib borib qoʻyamiz

.

.

=

.

1. Shunday qilib bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

koʻrinishda boʻlib, differensial tenglamaga qoʻyib tekshirib koʻrish talabaga tavsiya etiladi.

**2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash**

Amaliyotda analitik jihatdan aniq yechilmaydigan differensial tenglamalar juda koʻp. Boshqacha qilib aytganda nima qilganda ham bunday tenglamalarni integrallashni iloji yoʻq. Muammo shundaki, ularning umumiy yechimi (tekislikdagi chiziqlar oilasi) mavjud boʻlishi mumkin. Mana shunday hollarda hisoblash matematikasi usullari yordamga keladi. Qatorlar yordamida taqriban yechimni topish mumkin boʻladi.

Boshlangʻich shart ni qanoatlantiruvchi differensial tenglamaning taqribiy yechimi *y(x)* ni Teylor qatorining noldan farqli birinchi uchta hadi koʻrinishida topilsin.

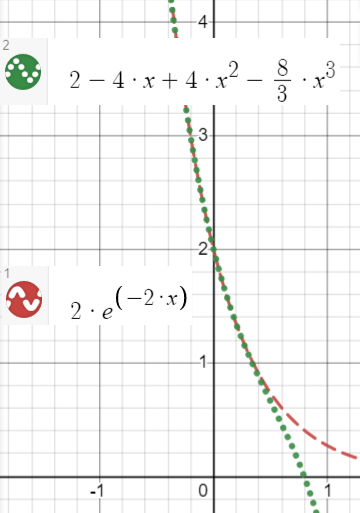
Qidirilayotgan xususiy yechim *y=y(x)* Teylor qatoriga yoyilmasi quyidagicha:

Qatorning qanchalik koʻp hadini olsak, shunchalik mos koʻphadning grafigi *y=y(x)* funksiya grafigiga yaqinlashadi.

**Misol.** differensial tenglamani y(0)=2 boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi Teylorning noldan farqli birinchi toʻrtta hadi orqali taqriban topilsin.

Masala shartida boʻlgani uchun Teylor qatori Makloren qatoriga aylanadi:

Yechish bosqichlarini nomerlab chiqqan maʼqul:

1. y(0)=2

Topilgan qiymatlarni Makloren qatoriga qoʻyamiz:

Juda katta oraliqda kubik funksiyaning grafigi (yashil rangda) analitik topilgan yechim grafigi (qizil rangda) bilan ustma-ust tushayapti. Ikkala grafik ham boshlangʻich shartdagi nuqtadan oʻtadi, tabiiyki ushbu nuqtaga yaqin atrofda aniqlik maksimal boʻladi. Tabiiyki qanchalik koʻp qator hadlari qarab chiqilsa, shunchalik mos koʻphad analitik yechimga yaqinlashadi.

**Misol.** Differensial tenglama xususiy yechimini Makloren qatoriga yoyib, birinchi 3 ta noldan farqli hadlar bilan chegaralanib taqriban topilsin.

Yuqorida keltirilgan algoritm differensial tenglamaning tartibiga bogʻliq boʻlmagan ravishda ishlayveradi.

1. y(0)=0 shart boʻyicha.
2. shart boʻyicha.

Demak uchta noldan farqli hadlarga ega boʻldik.

**Misol 3.**  Differensial tenglama xususiy yechimini Makloren qatoriga yoyib, birinchi 3 ta noldan farqli hadlar bilan chegaralanib taqriban topilsin.

Misolni yechish oʻquvchiga havola.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Qanday differensial tenglama o‘ng tomoni maxsus ko‘rinishidagi diffеrеnsial tеnglama deyiladi?
2. Agar  va α xarakteristik tenglamani ildizlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechimi qanday koʻrinishda boʻladi?
3. Agar  va α xarakteristik tenglamaning bitta ildizi bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechimi qanday koʻrinishda boʻladi?
4. Agar  va α xarakteristik tenglamaning ildizlari bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechimi qanday koʻrinishda boʻladi?
5. Agar  va  son xarakteristik tenglamani ildizlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechimi qanday koʻrinishda boʻladi?
6. Agar  va  son xarakteristik tenglamani ildizlari bilan ustma-ust tushsa, u holda xususiy yechimi qanday koʻrinishda boʻladi?
7. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash usulini tushuntiring.

# 10-mavzu IKKINCHI TARTIBLI DIFFЕRЕNSIAL TЕNGLAMALAR VA ULARNI YECHISHNING O‘ZGARMASNI VARIATSIYALASH USULI OSTROGRADSKIY-LIUVILL FORMULASI

**Reja**

1. **Diffеrеnsial tеnglamalarni yechishning o‘zgarmasni variatsiyalash usuli (Lagranj usuli).**
2. **Ostrogradskiy-Liuvill formulasi.**

***Tayanch so‘z va iboralar.*** Lagranj usuli, Ostrogradskiy-Liuvill formulasi.

**1.Diffеrеnsial tеnglamalarni yechishning o‘zgarmasni variatsiyalash usuli (Lagranj usuli)**

n-tartibli chiziqli bir jinsli boʻlmagan yoki oʻng tomoni berilgan differensial tenglama

(1)

berilgan boʻlsin, bu yerda lar *x* ning uzluksiz funksiyalari. Bu tenglama uchun bir jinsli qismi

(2)

bo’ladi.

**1-teorema.** Chiziqli bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaning xususiy yechimi va mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yigʻindisidan iborat.

Bir jinsli boʻlmagan tenglamaning umumiy yechimini topishning umumiy usuli – **Lagranjning** ixtiyoriy **oʻzgarmaslarni variatsiyalash usulini** qarab chiqamiz:

Bir jinsli tenglama (2) ning umumiy yеchimi tuzamiz:

(3)

Bir jinsli boʻlmagan (1) tenglamaning umumiy yechimini larni  ***х***ning funksiyasi deb, yuqoridagi shaklda yechimni izlaymiz: . (4)

Bu funksiyalarni shunday topish talab qilinadiki, (4) yechim (1) tenglamani qanoatlantirsin. Quyidagi tеnglamalar sistеmasini tuzamiz.

(5)

Nomaʼlum lardan iborat bu tenglamalar sistemasi yechimga ega, chunki sistemaning larning oldilaridagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan bosh determinant chiziqli erkli xususiy yechimlarning Vronskiy determinantidan iboratdir. Maʼlumki, bunday determinant chiziqli erkli funksiyalar uchun noldan farqlidir.

Shunday qilib, (5) Sistema larga nisbatan yechilishi mumkin. Ularni topib integrallaymiz:

…………………………

Bu yerda - lar integrallash oʻzgarmaslari. Sistеmadan larni topib (4) tеnglikka qo‘ysak (1)-tеnglamaning umumiy yеchimi ni topamiz.

Bir jinslimas ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

(1)

berilgan boʻlsin. Bunday tenglama umumiy yechimining tuzilishi quyidagi teorema bilan aniqlanadi:

**Teorema.** Bir jinslimas (1) tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaning biror *y\** xususiy yechimi bilan mos bir jinsli

(\*)

tenglamaning umumiy yechimi yigʻindisi kabi ifodalanadi: .

Yuqorida keltirilgan algoritmni xususiy holda o‘zgarmas koeffitsiyеntli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan diffеrеnsial tеnglamaga qo‘llaymiz, (\*) tenglamaning umumiy yechim

bo‘lsin. va larni ***x*** ning hozircha nomaʼlum funksiyalari deb hisoblab, bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimini

(\*\*)

koʻrinishda izlaymiz. Buni differensiallaymiz:

va funksiyalarni

tenglik bajariladigan qilib tanlab olamiz. Agar bu qoʻshimcha shartni eʻtiborga olsak, u holda birinchi tartibli hosila :

koʻrinishda boʻladi. Endi bu ifodani differensiallab ni topamiz:

larni (1) tenglamaga qoʻyamiz:

yoki

Tenglikni hosil qilamiz. Birinchi ikkita qavs ichida turgan ifodalar nolga aylanadi, chunki va bir jinsli tenglamaning yechimlari. Demak keying tenglik

Koʻrinishni oladi. Shunday qilib, va funksiyalar quydagi tеnglamalar sistеmasini qanoatlantirsa, yaʼni:

boʻlsa, u holda funksiya (1) bir jinslimas tenglamaning yechimi boʻladi. Ushbu sistemadan va larni aniqlaymiz:

Ularni integrallab,

;

Tengliklarni hosil qilamiz, bunda va lar integrallash oʻzgarmaslari. va larning ifodalari (\*\*) ga qoʻyib, va oʻzgarmas miqdorlarga bogʻliq boʻlgan bir jinslimas tenglamaning yechimini hosil qilamiz.

**Misol:**

**Yechish: 1)** .



**2)** 

 ,

,

, ,

**Misol.** Ushbu differensial tenglamani yeching:  **.**

**Yechish.** Bu tenglamada esa koeffitsiyentlar oʻzgarmas son emas, balki funksiyalar, shunday boʻlsada algoritm oʻzgarmaydi:

1)Mos bir jinsli differensial tenglama

yoki

ning umumiy yechimini izlaymiz:

=

Shunday qilib fundamental Sistema lardan iborat.

1. Umumiy yechimni koʻrinishda izlaymiz:

Integrallaymiz:

Demak berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

Agar deb faraz qilsak, (1) tenglamaning xususiy yechimini hosil qilamiz:

Xususiy yechimlarni topishda quyidagi teoremaning natijalaridan foydalanish maqsadga muvofiqdir:

**Teorema:**

(10)

tenglamaning *y\** yechimini (bunda oʻng tomon ikkita *f(x)* va funksiyalarning yigʻindisidan iborat, umuman olganda qoʻshiluvchilar soni har qancha boʻlganda ham teorema oʻrinli) yigʻindi shaklida tasvirlash mumkin, bunda va mos ravishda

(11)

(12)

tenglamalarning yechimlari.

Isbot. (11) va (12) tengliklarning oʻng va chap tomonlarini qoʻshib, quyidagini hosil qilamiz:

Ushbu tenglikdan esa (10) tenglamaning yechimi ekani kelib chiqadi.

**Misol.** Ushbu

tenglamaning xususiy yechimi topilsin.

**Yechish.**

Tenglamaning xususiy yechimi:

boʻladi.

Tenglamaning xususiy yechimi

boʻladi. Berilgan tenglamaning xususiy yechimi:

boʻladi.

1. **Ostrogradskiy-Liuvill formulasi**

Ostrogradskiy-Liuvill formulasi chiziqli bir jinsli tenglama yechimlari sistemasining Vronskiy determinanti bilan bu tenglamaning koeffitsiyentlarini bogʻlaydi. Bu formulani ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglama boʻlgan xususiy hol uchun koʻrsatamiz:

Agar fundamental sistema boʻlsa, u holda

Birinchi tenglikning hadlarini ga, ikkinchi tenglikning hadlarini ga koʻpaytirib va ikkinchisidan birinchisini ayirib, topamiz:

(6)

Bu yerda – Vronskiy determinant, – Vronskiy determinant hosilasi. Natijada (\*) tenglik quyidagi koʻrinishga keladi:

(7)

(7) tenglamaning yechimini oʻzgaruvchilarni ajratib topamiz:

chunki yechimlar sistemasi fundamentaldir. Integrallaymiz:

(8)

Endi (7) tenglamaning

Boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz. Ularni umumiy yechimga qoʻyib topamiz:

(9)

(8) ifodani (9) ifodaga boʻlamiz:

Bu yerdan

(10)

ekani ravshan.

(10) formula Ostrogradskiy-Liuvill formulasi deyiladi. Ushbu formula nafaqat ikkinchi tartibli, balki istalgan tartibli tenglama uchun ham oʻrinlidir. Ushbu formula ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaning bitta xususiy yechimi maʻlum boʻlganda uning umumiy yechimini topishga imkon beradi.

**Misol.** , tenglamaning yechimi maʼlum boʻlsa, uning umumiy yechimini toping?

**Yechish.** Tenglamani x ga boʻlib qaytadan yozamiz:

almashtirish bajaramiz: bu yerdan

Xususiy yechimni izlayotganimiz uchun: deb olsak, ni hosl qilamiz.Ikkita: lar boʻlgani uchun chiziqli erkli. Ular fundamental sistema tashkil etadi, shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

funksiyadan iborat boʻladi.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Chiziqli bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi haqidagi teoremani ayting.
2. Bir jinsli boʻlmagan tenglamaning umumiy yechimini topishning umumiy usuli – Lagranjning ixtiyoriy oʻzgarmaslarni variatsiyalash usulini ayting.
3. O‘ng qismi ikki funksiya yig‘indisi shaklidagi bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamaning xususiy yig‘indisi qanday shaklda qidiriladi?
4. Ostrogradskiy-Liuvill formulasi deb nimaga aytiladi va u qaysi hollarda qo‘llanadi?

**11-mavzu.** **DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH USULLARI (MATEMATIK PAKETLAR YORDAMIDA)**

**Reja**

**1.Eyler usuli.**

**2.Runge-Kutta usuli.**

***Tayanch so‘z va iboralar.*** Eyler usuli, Runge-Kutta usuli.

**1.Eyler usuli**

Differensial tenglamalar kursini oʻrganish jarayonida maxsus koʻrinishlarga ega boʻlgan differensial tenglamalarni yechish usullarini koʻrib chiqdik. Bu usullarjuda koʻp boshqa holatlarni qamrab ololmaydi. Shuning uchun ham tenglama koʻrinishiga bogʻliq boʻlmagan universal usullarni qidirishga sabab boʻldi. Hisoblash mashinalarining rivojlanishi taqribiy sonli usullarni muvoffaqiyatli qoʻllanilish imkoniyatini yaratdi.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasidan boshlaylik. Aytaylik

(1)

koʻrinishdagi differensial tenglamani

(2)

boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi yaʼni Koshi masalasi berilgan boʻlsin. Umumiy holda Koshi masalasining yechimini topish mumkin emas. funksiyaning maʼlum koʻrinishlaridagina (1) ni umumiy yechimini topish usullari mavjud. Amaliy masalalarda koʻp hollarda differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullaridan foydalaniladi. Yechimni mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema shartlari bajarilgan deb faraz qilamiz. nuqta atrofida funksiya ***x*** boʻyicha uzluksiz, ***y*** boʻyicha esa Lipshis shartini qanoatlantirsin.

(1)-(2) Koshi masalasi yechimi *y(x)* ni nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

(3)

nuqtaning kichik atrofida Teylor qatorining birinchi ikkita hadini olib, qolgan hadlarini tashlab yuboramiz, natijada quyidagicha taqribiy formulaga kelamiz

(4)

Agar ni (1) formuladagi koʻrinishidan foydalansak, u holda (4) formulani quyidagicha koʻrinishda yozish mumkin:

(5)

(5) formulani oraliqqa umumlashtirish uchun, ushbu oraliqni *n* ta boʻlakka boʻlamiz. Boʻlaklash qadami:

Masala yechimini nuqtalarda jadval koʻrinishida topishni maqsad qilib qoʻyamiz. Taqribiy qiymatlarni (5) formula boʻyicha topamiz:

(6)

bunda Ushbu formulaga **Eyler usuli** deyiladi. Eyler usuli universal usul boʻlib, *f(x,y)* ning koʻrinishiga bogʻliq emas, lekin xatolik nisbatan katta. Har qadamdagi xatolik tartibida boʻlib, bu xatolik qadamba-qadam ortib borib, b nuqtaga yetib borguncha xatolik gacha ortishi mumkin. Koordinatalar tekisligida nuqtalarni toʻgʻri chiziq kesmalari bilan tutashtirishdan hosil boʻlgan siniq chiziq integral egri chiziqning

**Izoh:** bilan (1) tenglamaning dagi Eyler siniq chizigʻiga mos taqribiy yechimini belgilaymiz. Agar (10 tenglamaning boshlangʻich shartlarini qanoatlantiruvchi hamda [ kesmada aniqlangan birgina yechimi mavjud boʻlsa, u holda [ kesmadagi har qanday *x* uchun

boʻlishini isbotlash mumkin.

**Misol 1.** , boshlangʻich shartni qanoatlantiruvchi yechimning x=0.3 dagi taqribiy qiymati Eyler usulida topilsin.(qadam *h*=0.1).

**Yechish.**

Hisoblashlarni (6) formula boʻyicha amalga oshiramiz

Eyler usuli dasturlash uchun qulay. (6) formula asosida ixtiyoriy (1)-(2) Koshi masalasini, har qanday oldindan berilgan aniqlik bilan yechish mumkin. Aniqlikni oshirish uchun qadamlar soni ***n*** ni koʻpaytirish yetarli. Buning uchun quyidagicha munosabatlardan foydalanamiz:

. (7)

**2.Runge-Kutta usuli**

Ushbu kursni oʻqish jarayonida taʼkidlangan ediki, matematikaning differensial tenglamalar boʻlimi amaliy masalalardan kelib chiqqan. Shuning uchun ham (6) formulaga oʻxshash universal usullarni yaratish doimiy dolzarb muammo boʻlib kelgan. Ushbu muammoni yechishga turli xil soxa vakillari ham qoʻl urishgan. Bunga yaqqol misol bittasi fizik, bittasi astronom boʻlgan olimlar tomonidan yaratilgan Runge-Kutta usuli hisoblanadi. Ushbu usulning yaratilishiga asos boʻlib, (3) qator xizmat qildi. Eyler usuli (6) dan farqli ravishda, ular ikkita emas, balki beshta haddan foydalanishdi. Bundan tashqari Runge-Kutta usulida (3) qatorga kiradigan hosilalarni hisoblash talab etilmaydigan formulalar taklif etildi. Nazariy jihatdan ushbu formulalarning kelib chiqishiga toʻxtalmasdan, ishchi formulalarga toʻxtalamiz. Boʻlish qadami Eyler usulidagidek formula bilan aniqlanadi.

Qidirilayotgan funksiya qiymatlarini topish formulalari quyidagicha boʻladi:

(8)

*.*

Koʻrinib turibdiki, Runge-Kutta usulida har bir qadamda formal ravishda Eyler usuliga nisbatan 5 marotaba koʻp hisoblash hajmi oshib boradi. Runge-Kutta usulining har bir qadamdagi xatoligi tartibida boʻladi. Aynan shuning uchun ham birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini taqribiy yechishda Runge-Kutta usuli asosiy usulga aylandi. Shuni eʼtiborga olish lozimki juda koʻp sonli usullar uchun tadbiq qilish dasturlari yaratilgan va bu dasturlar zamonaviy kompyuterlar operatsion sistemalarida mavjud. Ushbu dasturlarga murojaat soddalashtirilgan. Differensial tenglamaning oʻng tomoni *f(x,y)*, boshlangʻich shart va aniqlikni berish kifoya.

**Misol 2.**  =0.01 aniqlikda yechimini aniqlang?

**Yechish**. Aytaylik, h=0.25 deb olsak, [0, 1.5] oraliqni 6 ta boʻlakka ajratamiz:

Boshlangʻich shartga koʻra

Demak,

u holda ni topamiz. Ushbu jarayonni bir necha marotaba takrorlab, ning taqribiy qiymatini aniqlashimiz mumkin boʻladi.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Eyler usulini ayting.
2. Runge-Kutta usulini ayting.

**12-mavzu DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI. YECHISH USULLARI**

**Reja**

1. **Differensial tenglamalarning normal sistemasi.**
2. **Noʻmalumlarni ketma-ket yoʻqatish usuli.**
3. **Xarakteristik tenglamalar (Eyler) usuli.**
4. **Bir jinsli boʻlmagan chiziqli oʻzgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini oʻzgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan yechish.**
5. **Differensial tenglamalar avtonom sistemalari. Avtonom tenglamalar sistemasi yechimining Lyapunov boʻyicha turgʻunligi.**

***Tayanch soʻz va iboralar.***Normal sistema, chiziqli normal sistema , noma’lumlarni yo‘qotish usuli, integrallovchi kombinatsiyalar usuli, Eyler usuli, avtonom sistema, avtonom sistema trayektoriyasi,faza tekisligi, Lyapunov bo‘yicha turg‘un, turg‘un tugun, turg‘un bo‘lmagan tugun, turg‘un bo‘lmagan egar, turg‘un fokus, turg‘un bo‘lmagan fokus, turg‘un bo‘lmagan markaz.

1. **Differensial tenglamalarning normal sistemasi.**

Quyidagi

 (1)

sistema ***normal sistema*** deb ataladi.

Kuzatilayotgan yoki tadqiqot qilinayotgan ayrim jarayonlar modeli (1) koʻrinishdagi tenglamalar sistemasidan iborat boʻladi.

**1 - m i s o l**. A modda *P* va *Q* moddalarga parchalansin. Ularning har birini hosil boʻlish tezligi *A* moddaning parchalanmagan qismiga proportsional boʻlsin. Agar *P* va *Q* moddalarning *t* momentdagi miqdorlarini mos ravishda  va  desak, u holda *A* moddaning t momentdagi miqdori  boʻladi. Masala

shartiga koʻra bu miqdor  va  miqdorlarning hosilalariga proportsional, ya’ni



**2 - m i s o l.** Biologiyadan ma’lumki, ayrim bakteriyalar koʻpa- yishdan tashqari oʻzining miqdorini kamaytirib turuvchi zahar ham ishlab chiqaradi. Faraz qilaylik, bakteriyaning miqdori N oʻzining koʻpayish tezligi  ga va zahar ishlab chiqarish tezligi  ga proportsional boʻlsin, bu yerda  zahar miqdori. U holda quyidagi sistemaga ega boʻlamiz:

(1) sistemani integrallash deganda, (1) ni va quyidagi berilgan

,  (2)

boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi noma’lum  funksiyalarni topishni tushunamiz.

Bunday sistemalarni integrallash uning koʻrinishiga qarab, har xil usullar bilan bajarilishi mumkin. Shulardan bir nechtasini koʻrib chiqamiz.

1. **Noʻmalumlarni ketma-ket yoʻqotish usuli.**

(1)- ning birinchi tenglamasini  boʻyicha differensiallaylik:



Tenglikning oʻng tarafidagi , ,  hosilalarni (1) dan

 lar orqali ifodalari bilan almashtiramiz, natijada quyidagi tenglama

hosil boʻladi:



Bu tenglamani differensiallab, aynan yuqoridagidek almashtirishlar bajarsak:



tenglama hosil boʻladi. Bu jarayonni davom ettirib, nihoyat



tenglamaga kelamiz. Endi hosil boʻlgan tenglamalardan quyidagi sistemani tuzib olaylik:

 (3)

Bu sistemaning dastlabki  ta tenglamasidan  larni  lar orqali ifodalab:

 (4)

sistemaning oxirgi tenglamasiga olib borib qoʻyamiz:

 (5)

Bu tenglamadan  ni topamiz:  (6)

Oxirgi tenglikni  marotaba differentsiallab, (4) ga qoʻysak, qolgan  noma’lumlar ham topiladi:



Agar (2) boshlangʻich shartlar berilgan boʻlsa, mos  koeffitsientlarni

topish xuddi bitta tenglama uchun bajarilgandek amalga oshiriladi.

Agar (1) ning oʻng tarafidagi funksiyalar oʻz oʻzgaruvchilariga nisbatan chiziqli boʻlsa, u holda sistemani ***chiziqli normal sistema*** deb ataymiz. Chiziqli normal sistemaga mos keluvchi (5) tenglama ham chiziqli boʻladi.

**3-misol.**

**Yechish.**

1. birinchi tenglamani t boʻyicha differensiallaylik, hosij boʻlgan va larni oʻrniga qiymatlarini quyamiz:
3. umumiy yechimi :
4. –larni topamiz:
5. Sistemani xususiy yechimi:

**4-m i s o l.  tenglamalar sistemasini yeching.**

**Yechish.** Birinchi tenglamani  boʻyicha differensiallaymiz:



va undan ,  larni yoʻqotamiz. Shu bilan tenglama 

koʻrinishga keladi. Buning xarakteristik tenglamasi  ildizlarga ega. Shuning uchun uning umumiy yechimi  boʻladi. z ni topish uchun bu yechimni sistemaning birinchi tenglamasiga qoʻyamiz:



**Eslatma.** Ayrim hollarda sistemaning tenglamalari ustida bir nechta almashtirishlar bajarib, yechimni topishga olib keladigan osongina integrallanadigan tenglama hosil qilish mumkin. Bu usulni ***integrallovchi kombinatsiyalar usuli*** deb atashadi.

**5 -m i s o l**.  tenglamalar sistemasini yeching.

**Yechish.** Avval birinchi integrallovchi kombinatsiyani tuzib olamiz. Buning uchun birinchi tenglamani ikkinchisiga boʻlamiz:

  yoki 

Ikkinchi integrallovchi kombinatsiyani tuzish uchun birinchi tenglamani 2 ga va ikkinchi tenglamani 3 ga koʻpaytirib, oʻzaro qoʻshamiz:

  yoki 

Hosil boʻlgan tenglamalardan sistema tuzib olib, umumiy yechimni topamiz:

1. **Xarakteristik tenglamalar (Eyler) usuli.**

**Oʻzgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.** Faraz qilaylik, bizga quyidagi

 (7)

sistema berilgan boʻlsin, bu yerda barcha koeffitsientlar oʻzgarmas.

Bu sistemani  matritsa koʻrinishida ham yozish mumkin, bu yerda

Berilgan (7) sistemaning yechimini

koʻrinishda izlaymiz. Agar bularni sistemaning tenglamalariga qoʻyib, oʻxshash hadlarni ixchamlasak, noma’lum  koeffitsientlarga nisbatan quyidagi chiziqli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

 (8)

Ma’lumki, bunday sistema hamisha birgalikda, masalan, hech boʻlmaganda nol  yechimi mavjud. (8) sistema noldan farqli yechimga ega boʻlishi uchun uning determinanti nolga teng boʻlishi zarur va etarlidir:



Bu λ ga nisbatan n-darajali algebraik tenglama. Uni A matritsaning va shu vaqtning oʻzida (7) sistemaning ham xarakteristik tenglamasi deb ataymiz.

Ma’lumki, bunday tenglama n ta  ildizlarga ega. Ular A matritsaning xos sonlari boʻladi. Har bir  xos songa biror  xos vektor mos keladi.

Bu yerda uch hol yuz berishi mumkin.

**1-hol.** Barcha xos sonlar har xil:  va haqiqiy. U holda, (7) sistema n ta yechimga ega:

 uchun: 

 uchun: 

………………………………………………………

 uchun: 

Biz fundamental yechimlar sistemasini topdik. Umumiy yechim





…………………………………………



koʻrinishda boʻladi.

**6 - m i s o l.**   sistemaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.** Sistemaning xarakteristik tenglamasini tuzib olaylik:

 yoki .

Uning  ildizlari sistemaning matritsasini xos sonlaridir.  ga mos keluvchi xos vektorni topish uchun



sistemani tuzib olamiz. Bu bitta  tenglamaga ekvivalent. Bundan (1;-2) vektorni aniqlaymiz.

Agar λ oʻrniga  ni qoʻysak, quyidagi sistema hosil boʻladi:



Bundan (1;1) vektor aniqlanadi.

U holda fundamental yechimlar:  da ;  da , umumiy yechim esa

boʻladi.

**2-hol.** Xos sonlar har xil, lekin ularning ayrimlari kompleks.

Umumiylikni buzmagan holda bu kompleks ildizlar  boʻlsin, deb faraz qilaylik. Bu ildizlarga

yechimlar mos keladi.

Aynan 10-§ ning 3-holiga oʻxshagan mulohazalar bilan kompleks yechimning haqiqiy va mavhum qismlari ham yechim boʻlishini koʻrsatish mumkin. Shu sababli,  larga mos keladigan xususiy yechimlar sifatida

funktsiyalarni olish mumkin, bu yerda  lar  lar orqali aniqlanadigan haqiqiy sonlar. Sistemaning umumiy yechimiga shu funktsiyalarning mos kombinatsiyalari kiradi.

**7 - m i s o l.**   sistemaning umumiy yechimini toping.

**Yechish**. Avval xarakteristik tenglamani tuzib olamiz:

 yoki .

Uning ildizlari:  Birinchi  xos songa mos keluvchi xos vektor (1; 1+i), ikkinchi  xos songa mos keluvchi xos vektor (1; 1-i). U holda bu xos son va xos vektorlarga mos keluvchi berilgan sistemaning yechimlari quyidagicha:

yoki agar ularning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib yozsak:

funktsiyalarni xususiy yechim sifatida olish mumkin. Demak, umumiy yechim





boʻladi.

**3-hol.** Xos sonlarning ayrimlari haqiqiy va karrali.

Umumiylikni buzmagan holda,  xos son haqiqiy va m karrali boʻlsin, deb faraz qilamiz. Unga mos keluvchi sistemaning echimi

  (9)

koʻrinishda boʻladi, bu yerda  lar darajalari *m-1* dan katta boʻlmagan koʻphadlar. Agar (9) ni (7) ga qoʻyib, *t* larning bir xil darajali hadlari oldidagi koeffitsientlarni tenglasak, bu koʻphadlarning noma’lum koeffitsientlarini topish uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Buning bajarilish tartibini quyidagi misolda koʻrib chiqaylik.

**8 - m i s o l.**   sistemaning umumiy yechimini toping.

**Yechish***.* Avval xarakteristik tenglamani yechib olamiz:

 xos songa  

yechimlar mos keladi. Ularni *t* boʻyicha differentsiallab, sistemaga qoʻyamiz:





Agar bu tengliklarning har birini  ga qisqartirib, *t* ning oldidagi koeffitsientlarni va ozod hadlarni tenglasak:

sistemalarni hosil qilamiz. Bundan  kelib chiqadi. Agar  desak,  boʻladi, shuning uchun sistemaning umumiy yechimi quyidagicha boʻladi:

1. **Bir jinsli boʻlmagan chiziqli oʻzgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini oʻzgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan yechish**

Usulning gʻoyasi va amalga oshirilishini ikkita oʻzgaruvchili ikkita tenglama uchun koʻrib chiqamiz. Amaliy masalalarda juda koʻp uchraydigan bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamalar sistemasi quyidagicha koʻrinishda boʻladi:

(10)

Birinchi navbatda koʻrib chiqilgan usullar asosida bir jinsli hol uchun umumiy yechimni topamiz

(11)

Bunda –ixtiyoriy oʻzgarmaslar. Bir jinsli boʻlmagan sistemani xususiy yechimini topish uchun (11) formulalardan foydalanamiz, faqatgina lar ning funksiyalari deb faraz qilamiz.

(12)

Agar (12) ni differensiallab, (10) ga olib borib qoʻysak, va (11) funksiyalar bir jinsli sistemaning yechimi ekanligini hisobga olsak, u holda nomaʼlum funksiyalarni topish uchun quyidagicha sistemaga ega boʻlamiz:

(13)

Kramer usuliga koʻra (4) sistemadan quyidagilarni olamiz:

Demak sistemaning yechimi:

(14}

boʻladi. Ushbu tengliklarni integrallab larni topib olamiz. Ularni (12) formulalarga qoʻyib xususiy yechimlarni topamiz. Ushbu jarayon nazariy jihatdan yetarlicha shaffof boʻlsada, amaliy tadbiq qilinganda juda koʻp mehnatni va xushyorlikni talab qiladi. Bunga misollar ishlab ishonch hosil qilish mumkin.

**9-misol.**

**Yechish.**

1) Mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimini topshdan boshlaymiz. Bunda

deb hisoblaymiz. Bir jinsli differensial tenglamaning koeffitsiyentlar matrisasini tuzamiz:

2) Sistemaning xarakteristik tenglamasi

.

koʻrinishda boʻlib, uning ildizlarini topamiz.

3)Umumiy yechimlarni:

- ixtiyoriy konstantalar

-larni topish kerak, buning uchun quyidagicha sistemani yechamiz:

4) boʻlganda xarakteristik tenglama determinantiga qoʻyib, uning sonlaridan quyidagicha ikkita oʻzgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini quramiz va undan - larni topamiz:

boʻlganda boʻlganda xarakteristik tenglama determinantiga qoʻyib, uning sonlaridan quyidagicha ikkita oʻzgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini quramiz va undan - larni topamiz:

Shunday qilib bir jinsli differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

- ixtiyoriy konstantalar

koʻrinishda boʻlib, bir jinsli boʻlmagan differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimini topish uchun esa oʻzgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan topamiz. Buning uchun -larni ***t*** ga bogʻliq funksiyalar sifatida qarab

(15)

Ushbu yechimni berilgan differensial tenglamalar sistemasiga qoʻyamiz. Natijada – larning hosilalaridan iborat boʻlgan quyidagicha sistemaga kelamiz:

(16)

larni topish uchun (14) Kramer formulalaridan foydalanamiz, bunda

ekanligini eʼtiborga olamiz, u holda

;

boʻladi, tengliklarni integrallasak

, .

Ushbu ifodalarni (15) formulaga qoʻyamiz bir jinsli boʻlmagan sistemaning umumiy yechimi quyidagicha koʻrinishni oladi:

Oʻquvchiga oʻrniga qoʻyish orqali topilgan yechimni toʻgʻriligini tekshirib koʻrishni mustaqil bajarishni taklif qilamiz.

1. **Differensial tenglamalar avtonom sistemalari. Avtonom tenglamalar sistemasi yechimining Lyapunov boʻyicha turgʻunligi.**

**Taʼrif.** Agar birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasida erkli oʻzgaruvchi *t* yaqqol koʻrinishda qatnashmasa, bunday tenglamalar sistemasiga avtonom sistemalar deyiladi.

Umumiy holda hosilalarga nisbatan yechilgan sistemaning normal koʻrinishi quyidagicha boʻladi:

(17)

Avtonom sistemani vector koʻrinishida ham ifodalash mumkin:

hosilalar faqatgina larga bogʻliq boʻlib, *t* erkli oʻzgaruvchiga bogʻliq boʻlmagani uchun, yechim oʻzgarishini oʻzi boshqaradi, shuning uchun ham sistemaga avtonom sistema deyiladi. (17) koʻrinishdagi avtonom sistemalarni yechishda eng muhim jihat shundaki, bogʻliqlik qonuni vaqt oʻtishi bilan oʻzgarmaydi, chunki oʻng tomon *t* ga bogʻliq emas. Agar qoʻshimcha ravishda (17) sistemaga boshlangʻich shartlar qoʻyilgan boʻlsa:

(18)

u holda Koshi masalasiga ega boʻlamiz (17)–(18).

Avtonom sistemalar **dinamik sistemalar** ham deb yuritiladi. Har qanday normal koʻrinishdagi differensial tenglamalar sistemasini nomaʻlum funksiyalar sonini bittaga oshirish hisobiga avtonom sistema koʻrinishga keltirish mumkin. funksiyani kiritsak

kiritsak, u holda sistema avtonom sistemaga aylanadi.

(19)

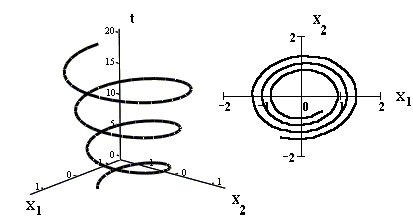
Faraz qilaylik koʻrilayotgan avtonom sistemalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema shartlari bajarilgan boʻlsin. Aytaylik , [a, b] oraliqda aniqlangan avtonom sistemaning yechimi boʻlsin, nuqtalar toʻplami da aniqlangan egri chiziq boʻladi. Ushbu egri chiziqni **fazali trayektoriya** yoki **avtonom** **sistemaning trayektoriyasi**  deyiladi, fazali trayektoriyalar joylashgan fazoga esa avtonom sistemaning **fazali fazosi** deyiladi.

Agar ***F(a)***=0 boʻlsa, u holda ***a*** nuqta **muvozanat holati** yoki avtonom sistemaning **muvozanat** (**sukut) nuqtasi** deyiladi.

Fazali trayektoriyaning parametrik tenglamasi tenglik boʻladi. Sistemaning integral egri chizigʻi (yechimi) ***n+1*** oʻlchovli fazoda tasvirlanadi va quyidagicha tenglamalar bilan aniqlanadi:

Tushunarliki, mos fazali trayektoriya – integral egri chiziqning fazodagi proyeksiyasi hisoblanadi.

Masalan quyidagi rasmlarda avtonom sistemaning integral egri chizigʻi va unga mos fazali trayektoriya tasvirlari keltirilgan.



1. sistema yechimini geometrik tahlil qilish uchun fazali tekislik qarab chiqiladi. Jarayon murakkab boʻlgani uchun *n=2* oʻlchovli hol bilan chegaralanamiz. Shu bilan birga (18) boshlangʻich shartlar ushbu tekislikda nuqtani beradi. (17)-(18) Koshi masalasi yechimi:

koʻrinishda beriladi. Agar ***t*** ni vaqt deb faraz qilsak, u holda sistema yechimi nuqtadan oʻtuvchi nuqtaning harakat trayektoriyasini beradi.

Avtonom sistemlar yechimlari tahlilini oʻzgarmas koeffitsiyentli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi uchun koʻrib chiqamiz. Aytaylik quyidagicha tenglamalar sistemasi:

(20)

boshlangʻich shartlar:

(21)

bilan berilgan boʻlsin.

Bizga maʼlum usullar yordamida (20)-(21) Koshi masalasining xususiy yechimini

topamiz. tekislik (20) sistemaning **faza tekisligi**, uning yechimlari esa, quyidagi

 (22)

**differensial tenglamaning traektoriyalari** deb ataladi.

**O(0,0)** koordinatalar boshi (22) tenglamaning **maxsus nuqtasi** boʻladi, chunki bu nuqtada tenglama yechimining mavjudlik va yagonalik sharti buziladi.

О(0;0) muvozanat (sukut) nuqtasi bir qancha turlarga boʻlinadi:

1. **Turgʻun tugun** nuqta.
2. Turgʻun boʻlmagan **tugun** nuqta.
3. Turgʻun boʻlmagan **egar** nuqta.
4. Turgʻun **fokus** nuqta.
5. Turgʻun boʻlmagan **fokus** nuqta.
6. Turgʻun boʻlmagan **markaz** nuqta

Ushbu

 (23)

sistema berilgan boʻlib, uning barcha koeffitsientlari oʻzgarmas boʻlsin.  bu sistemaning sukut nuqtasi boʻladi, buni bevosita oʻrniga qoʻyish usuli bilan tekshirish mumkin. Bu nuqta turgʻun boʻlishi uchun koeffitsientlar qanday shartlarni qanoatlantirishini tekshiraylik.



xarakteristik tenglamasining ildizlarini  bilan belgilaylik.

Bu yerda uch hol yuz berishi mumkin.

**1-hol.** Barcha xos sonlar har xil: , haqiqiy va , boʻlsin. U holda (23) ning umumiy yechimi



 (24)

…………………………………………



koʻrinishda boʻladi.  koeffitsientlarni bu yechim (18) boshlangʻich shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Agar  desak:

, 

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yerda chunki ,  lar chiziqli erkli xos vektorlar edi. U holda   bu yerda -  ning Δ determinantdagi algebraik toʻldiruvchisi. Quyidagi

belgilashlarni kiritaylik.

Agar ixtiyoriy  son uchun  desak, barcha  lar uchun  , boʻlgani uchun   boʻlganda,   boʻladi, ya’ni sukut nuqta **Lyapunov ma’nosida turgʻun** ekan. Bundan tashqari,  va demak, sukut nuqta **asimptotik turgʻun** ham ekan.

(24) koʻrinishdagi yechim uchun bu maxsus nuqta **turgʻun tugun nuqta** deb ataladi. Bunda nuqta  da traektoriya boʻylab, maxsus nuqtaga yaqinlashadi deymiz.

**10-misol.**  sistemaning  boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini turgʻunlikka tekshiring.

**Yechish.** Sistemaning xarakteristik tenglamasi

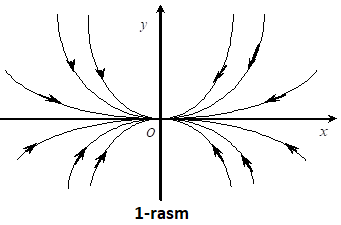


 ildizlarga ega. Sistemaning unga mos keluvchi yechimlari

Bulardan boshlangʻich  shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari  

Bundan koʻrinadiki,  da  ya’ni  yechim turgʻun. Endi faza tekisligiga oʻtaylik. (9) dan t parametrni yoʻqotsak:



parabolalar oilasini hosil qilamiz (1-rasmga qarang).

(22) tenglama bu misol uchun quyidagicha .

Bu tenglamaning O(0,0) maxsus nuqtasi turgʻun tugun nuqtadir.

**2-hol.** Barcha xos sonlar har xil: , haqiqiy va

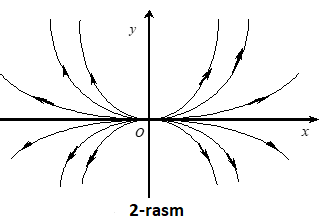
, boʻlsin. Bu holda ham yechim (24) koʻrinishda boʻladi.  da , , boʻlgani uchun boshlangʻich shartlar qanday boʻlishidan qat’iy nazar,  da , boʻladi, ya’ni yechim turgʻun emas.

 boʻlganda faza tekisligida sistemaning maxsus nuqtasi **turgʻun boʻlmagan tugun** boʻladi:  da nuqta traektoriya boʻylab  sukut nuqtasidan uzoqlasha boradi.

**11-misol.**  sistemaning yechimini turgʻunlikka tekshiring.

**Yechish.** Bu sistema uchun xarakteristik tenglama



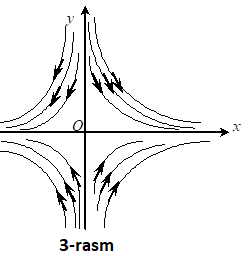
 ildizlarga ega. Unga mos keluvchi yechimlar:    da  ya’ni yechim turgʻun emas.Agar t ni yoʻqotsak:



parabolalar oilasi hosil boʻladi. O(0;0) maxsus nuqta turgʻun boʻlmagan tugun nuqtadir (2-rasmga qarang).

**3-hol.** Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy, lekin har xil ishorali. Umumiylikni buzmagan holda, faraz qilaylik,

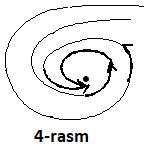
, ,,  boʻlsin. U holda, agar, unga mos keluvchi umumiy yechimdagi   koeffitsientlarning kamida biri noldan farqli boʻlsa,  da  boʻladi, ya’ni yechim turgʻun emas. Bunda sukut nuqtani **turgʻun boʻlmagan egar** deb ataymiz.

**** **12-misol.**  sistemaning yechimini turgʻunlikka tekshiring.

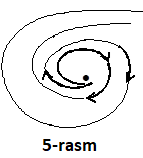
**Yechish.** Bu sistema uchun xarakteristik tenglama 

 ildizlarga ega. Unga mos keluvchi yechimlar:    da  ya’ni yechim turgʻun emas. Agar *t* ni yoʻqotsak:  tenglama hosil boʻladi. Bu faza tekisligida giperbolalar oilasini ifodalaydi (3-rasmga qarang). Maxsus O(0;0) nuqta turgʻun boʻlmagan egar nuqtadir.

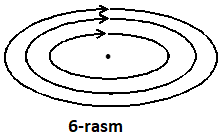
**4-hol.** Xarakteristik tenglamaning ayrim ildizlari kompleks. Umumiylikni buzmagan holda, faraz qilaylik,   boʻlib, qolganlari haqiqiy boʻlsin.

1. agar  boʻlsa, ularga mos keluvchi umumiy yechim

  koʻrinishda boʻladi. Shu sababli,  da  boʻladi, ya’ni yechim asimptotik turgʻun. Sukut nuqta bu holda **turgʻun fokus** deb ataladi (4-rasmga qarang).

 b) agar α > 0 (λi,  larning birortasi musbat) boʻlsa, u holda  ( musbat λi oldidagi ) boʻlsa,  da  boʻladi, ya’ni yechim turgʻun boʻlmaydi (5-rasmga qarang). Bu nuqtani **turgʻun boʻlmagan fokus** deb ataymiz.

c) agar  boʻlsa, ularga mos keluvchi umumiy yechim: 

  koʻrinishda boʻladi. Bu yechim Lyapunov ma’nosida turgʻun, lekin,  da  lar nolga intilmagani uchun, yechim asipmtotik turgʻun emas. Sukut nuqta bu holda **markaz** deb ataladi (6-rasmga qarang).

**XULOSA:**

1., haqiqiy va ,O(0,0) maxsus nuqta **turgʻun tugun nuqtadir**.

2. , haqiqiy va , O(0,0) maxsus nuqta **turgʻun boʻlmagan tugun nuqtadir**.

3.  ildizlari haqiqiy, lekin har xil ishorali boʻlsa

O(0,0) maxsus nuqta **turgʻun boʻlmagan egar nuqtadir**.

4.   boʻlib, qolganlari haqiqiy boʻlsin.

a)  O(0,0) maxsus nuqta **turgʻun fokus nuqtadir**.

b) α > 0 ,λi,  larning birortasi musbat boʻlsa, O(0,0) maxsus nuqta **turgʻun boʻlmagan fokus nuqtadir**.

c)  O(0,0) maxsus nuqta **turgʻun boʻlmagan markaz nuqtadir**.

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Qanday differensial tenglamalar sistemasiga normal sistema deyiladi?
2. Differensial tenglamalar sistemalarini yechish usullarini ayting.
3. Noma‘lumlarni ketma-ket byo‘qotish usulida differensial tenglamalar sistemalari qanday yechiladi?
4. Differensial tenglamalar sistemalarining chiziqli normal sistemasi deb nimaga aytiladi?
5. Oʻzgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechishning xarakteristik tenglamalar(Eyler) usulini ayting.
6. Integrallovchi kombinatsiyalar usuli nima?
7. Bir jinsli boʻlmagan chiziqli oʻzgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini oʻzgarmaslarni variatsiyalash usuli qanday?
8. Differensial tenglamalar avtonom sistemalari deb nimaga aytiladi?
9. Avtonom tenglamalar sistemasi yechimining Lyapunov boʻyicha turgʻunligini ayting.

**13-ma’ruza. Asl va tasvir. Laplas almashtirishi.**

**REJA:**

1. **Asl va tasvir.**
2. **Laplas almashtirishi xossalari va asosiy teoremalar.**
3. **Laplas boʻyicha tasvirlar jadvali.**
4. **Asl boʻyicha tasvirni topish.**
5. **Tasvir boʻyicha aslni topish.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Asl funksiya, Laplas almashtirishi, tasvir, teskari Laplas almashtirishi, Xevisayd funksiyasi, asl va tasvir jadvali.

**1.Asl va tasvir**

Butun sonlar uqida aniqlangan va qo’ydagi shartlarni qanatlantiruchi f(t)

funksiani qaraylik:

1) O***t*** oʻqning ixtiyoriy chekli intervalida ***f(t)*** funksiya uzluksis yoki chekli sondagi I-tur uzilish nuqtaga ega;

2) Barcha ***t<***0 lar uchun, ***f(t)=***0;

1. ***f(t)-***chegaralangan oʻsuvchi funksiya, koʻrsatkichli funksiyaga nisbatan tezroq oʻsmaydi, yaʼni shunday M>0, sonlar mavjudki, har qanday ***t*** lar uchun .

**Taʼtif 1.** Yuqoridagi 1)-3) shartlarni qanoatlantiruch ***t*** haqiqiy argumentli f(t***)***

ixtiyoriy kompleks funksiyaga **аsl funksiya** feyiladi

**Taʼtif 2.** Haqiqiy oʻzgaruvchili ***f(t)*** funksiyaning **Laplas almashtirishi** deb kompleks oʻzgaruvchili

tenglik bilan aniqlanadigan ***F(p)*** funksiyaga aytiladi.

Ushbu ifodaning oʻng tomoniga Laplas integrali deyiladi.

***f(t)*** funksiyaga Laplas almashtirilishining **asli, *F(p)*** funksiya esa ***f(t)*** funksiyaning **tasviri** deyiladi.

Adabiyotlarda asl bilan tasvir oʻrtasidagi bogʻliqlik yoki , kabi belgilanadi.

Xevisayd birlik funksiyasi  ning tasvirini topamiz:

, bu yerda  dan foydalanildi.

Agar  funksiya asl funksiyaning 1) va 3) shartlarini qanoatlantirsa,  funksiya uchala shartni ham qanoatlantiradi.

Bundan keyin  o‘rniga oddiygina  deb yozamiz va argumentning manfiy qiymatlarida nol deb hisoblaymiz.

Ushbu funksiyaning tasvirini, yaʼni Laplas almashtirishini topamiz:



Demak, , xususan boʻlganda 1 va , c=const.

Xuddi shu kabi,  funksiyaning tasvirini topamiz:





Bundan, .

**Taʼrif 3**. Kompleks oʻzgaruvchili ***F(p)*** funksiyaning **teskari Laplas almashtirishi** deb, haqiqiy oʻzgaruvchili

funksiyaga aytiladi, bunda –qandaydir haqiqiy son. Ushbu ifodaning oʻng tomoniga **Bromvich integrali** deyiladi.

**4. Asl va tasvirlar jadvali.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | ASL | TASVIR |
| 1 | *η*(*t*) |  |
| 2 | *eαt* |  |
| 3 | *tn* |  |
| 4 | *sinβt* |  |
| 5 | *cosβt* |  |
| 6 | *shβt* |  |
| 7 | *chβt* |  |
| 8 | *tneat* |  |
| 9 | *eαtsinβt* |  |
| 10 | *eαtcosβt* |  |
| 11 | *t⋅sinβt* |  |
| 12 | *t⋅cosβt* |  |

**Misol*.*** Ushbu  funksiyaning tasvirini toping .

**Yechish.** *α*=2, *β*=7,



**Misol*.***  funksianing aslini toping.

**Yechish.** 

**Tasvir boʻyicha aslni topishga oid misollar:**

Agar – toʻgʻri ratsional kasr boʻlsa, u holda ushbu kasrni sodda kasrlar yigʻindisiga yoyiladi va har bir sodda kasrlar uchun tasvirlar topiladi. Sodda kasrga yoyish qoidalarini eslatib oʻtamiz:

**Misol .** boʻlsin, u holda

**Yechish,**  , A, B, C, D-koeffitsiyentlarni topamiz

A=, B= , , D=

u holda ushbu tasvirga mos kelgan asl quyidagicha boʻladi:

**Misol.** Agar – toʻgʻri ratsional kasr boʻlib, -faqat oddiy ildizlardan iborat boʻlsa, u holda Xevisayd yoyilmasi formulasi qoʻllaniladi:

Aytaylik

; ;

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Asl funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Laplas almashtirishi nima?
3. Tasvir funksiya ta‘rifini ayting.
4. Xevisayd birlik funksiyasining tasvirini toping.
5.  funksiyaning tasvirini toping.
6.  funksiyaning tasvirini toping.
7. Asl va tasvirlar jadvalini keltiring.
8. Aslning tasvirini topishga doir misollar keltiring.
9. Tasvirdan aslni topishga misollar keltiring.

**14-ma’ruza. Laplas almashtirishining asosiy xossalari .**

**Reja**

**1.Operasion hisobni asosiy teoremalari.**

**2. Asllarning oʻramasi.**

**3. Dyuamel formulasi.**

***Tayanch soʻz va iboralar.*** Chiziqlilik, o‘xshashlik, siljish, kechikish, aslni differensiallash, aslni integrallash, tasvirni differensiallsh, tasvirni integrallash, asllarning o‘ramasi, Dyuamel formulasi.

**1.Operasion hisobni asosiy teoremalari**

**Teorema 1.** (chiziqlilik teoremasi)

Agar , va va lar oʻzgarmaslar boʻlsa, u holda

boʻladi.

**Teorema 2.** (oʻxshashlik teoremasi)

Agar va ***a***-oʻzgarmas son boʻlsa, u holda

boʻladi.

**Teorema 3.** (siljish teoremasi)

Agar boʻlsa, u holda ixtiyoriy kompleks son uchun,

boʻladi.

**Teorema 4.** (kechikish teoremasi)

Agar boʻlsa, u holda har qanday musbat son uchun,

boʻladi.

**Teorema 5.** (Aslni differensiallash teoremasi)

Agar – asl funksiyalar va boʻlsa, u holda

…………………………………………….

**Teorema 6.** (Aslni integrallash)

Agar boʻlsa, u holda

boʻladi.

**Teorema 7.** (Tasvirni differensiallash)

Agar boʻlsa, u holda

…, boʻladi.

**Teorema 8.** (Tasvirni integrallash)

Agar va integral yaqinlashuvchi boʻlsa, u holda u funksiyaning tasviri boʻlib xizmat qiladi, yaʼni boʻladi.

**Asl boʻyicha tasvirni topishga oid misollar**

**Misol 1**. , *F(p)*-?

da shakl almashtiramiz:

Chiziqlilik teoremasi va jadvaldagi 17-formuladan foydalanamiz

**Misol 2.** , *F(p)*-?

Aslni differensiallash teoremasidan foydalanamiz:

Demak va *f(0)=0* boʻlgani uchun, ulardan

ekanligi kelib chiqadi.

**Misol 3.** , *F(p)*-?

Bizga maʼlumki , tasvirni differensiallash teoremasiga koʻra

, u holda

**Misol 4.** , *F(p)*-?

Bizga maʼlumki, , u holda tasvirni integrallash teoremasiga koʻra

Demak:

**2. Asllarning oʻramasi.**

Aytaylik va ikkita asl funksiya boʻlsin. Ikkita aslning oʻramasi deb, t argument funksiyasi boʻlgan quyidagicha integralga

aytiladi.

Asllarning oʻramasi quyidagicha xossalarga ega:

1. ;
2. Agar , boʻlsa, u holda

yoki

**3.Dyuamel formulasi.**

Agar va boʻlsa, u holda

**Laplas boʻyicha tasvirlar jadvali**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | ASL | TASVIR |
| 1. | *f(t)* |  |
| 2. |  |  |
| 3. |  |  |
| 4. |  |  |
| 5. |  |  |
| 6. |  |  |
| 7. |  |  |
| 8. |  |  |
| 9. |  |  |
| 10. |  |  |
| 11. |  |  |
| 12. |  |  |
| 13. |  |  |
| 14. | 1 |  |
| 15. |  |  |
| 16. |  |  |
| 17. |  |  |
| 18. |  |  |
| 19. |  |  |
| 20. |  |  |
| 21. |  |  |
| 22. |  |  |
| 23. |  |  |
| 24. | *t* |  |
| 25. |  |  |
| 26. |  |  |
| 27. |  |  |

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Chiziqlilik xossasi deb nimaga aytiladi?
2. O‘xshashlik xossasi nima?
3. Siljish teoremasini ayting.
4. Kechikish teoremasini ayting.
5. Aslni differensiallash teoremasini keltiring.
6. Aslni integrallash teoremasini ayting.
7. Tasvirni differensiallash teoremasini ayting.
8. Tasvirni integrallash teoremasini ayting.
9. Asllar o‘ramasi deb nimaga aytiladi va uning tasvirini ayting.
10. Dyuamel formulasi deb nimaga aytiladi?

**15-mavzu. DIFFERENSIAL TENGLAMA VA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING OPERATSION USULI.**

**Reja**

1. **Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini operatsion usulda yechish.**
2. **Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini operatsion usulda yechish**

***Tayanch soʻz va iboralar****.* Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi, operator tenglama,chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechishning operatsion usuli.

**1.Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini operatsion usulda yechish.**

Quyidagicha differensial tenglamani koʻrib chiqamiz:

(1)

Quyidagicha boshlangʻich shartlarni bajaruvchi (1) tenglamaning yechimini qidiramiz:

, … , (2)

Aytaylik ; boʻlsin. (1) ni ikkala tomoniga Laplas almashtirishini va aslni differensiallash teoremasi, hamda Laplas almashtirishini chiziqlilik xossasiga koʻra, (2) boshlangʻich shartli (1) differensial tenglamani oʻrniga operator tenglamaga ega boʻlamiz:

(3)

Operator tenglamaning yechimini topamiz:

(4)

X(p) tasvir boʻyicha *x(t)* aslni topib, (1) va (2) Koshi masalasi yechimi *x(t)* ni topamiz.

**Misol 1.** ; *x(0)=*1; ; *x(t)*-?

**Yechish.**

u holda

kasrni soda kasrlarga yoyamiz:

; A, B, C-koeffitsiyentlarni topamiz.

Demak, yechim

Oʻzgarmas koeffitsiyentli *n*-tartibli chiziqli differensial tenglamani yechish talab qilingan boʻlsin. Quyida operatsion hisob usulining yana bir varianti bilan tanishamiz.

; (1)

0 ga teng boʻlgan boshlangʻich shartlarda, ya’ni

(5)

yechimini topish talab qilinsin. Aytaylik,

*L(x)=*1 (6)

xususiy tenglamaning (2) shartlarni bajaradigan yechimi aniq boʻlsin. Operator tenglamaga oʻtamiz:

, (7)

(8)

Operator koʻrinishdagi (7) va (8) tenglamalardan

Dyuamel formulasiga koʻra:

(9)

ekanligini eʼtiborga olib

(10)

bundan (1) tenglamaning (5) nol boshlangʻich shartlardagi *x(t)* yechimi, quyidagicha boʻladi:

(11)

bunda (6) va (5) yordamchi masala yechimi.

**Misol 2.** Dyuamel formulasi yordamida boshlangʻich shartlarni bajaruvchi differensial tenglamaning yechimi topilsin.

**Yechish.** Yordamchi masalani koʻrib chiqamiz:

Operatsion usuldan foydalanib, , , 1

ekanligini topamiz, undan esa

u holda (11) formulaga koʻra

=

.

**2. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini operatsion usulda yechish**

Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini operator yordamida yechish sxemasi, bitta differensial tenglamani yechish kabidir.

**Misol:** Quyidagicha differensial tenglamalar sistemasini yeching

**Yechish.**

Agar , , u holda ;

; va quyidagicha operatorli sistemaga oʻtamiz:

ushbu sistemani yechib

u holda X(p) va Y(p) lar uchun asllar quyidagicha koʻrinishni oladi:

**Mavzu yuzasidan savоllar**

1. Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini operatsion usulda qanday yechiladi?
2. Operator tenglama nima?
3. Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalarni 0 ga teng boʻlgan boshlangʻich shartlarda Dyuamel formulasi yordamida yechish qanday bajariladi?
4. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini operatsion usulda yechish qanday amalga oshiriladi?